1 Fourierreihen zeitkont. periodischer Signale

$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$	$\Longleftrightarrow$	$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-j\frac{2\pi k}{T}t}\, dt$
$x(t-T_0)$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\frac{2\pi k}{T}T_0} c_k$
$e^{j\frac{2\pi m}{T}t} x(t)$	$\Longleftrightarrow$	c_{k-m}
$x^*(t)$	$\Longleftrightarrow$	c^*_{-k}
$x(-t)$	$\Longleftrightarrow$	c_{-k}
$x(at), \quad a > 0$	$\Longleftrightarrow$	$c_k, \quad$ Periode $\frac{T}{a}$
$\int_0^T x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau$	$\Longleftrightarrow$	$T c_k d_k, \quad x,\, y$ gleiche Periode
$x(t)y(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \, d_{k-l}, \quad x,\, y$ gleiche Periode
$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\Longleftrightarrow$	$\mathfrak{Re}\{c_k\}$
$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\Longleftrightarrow$	$j\mathfrak{Im}\{c_k\}$
$\mathfrak{Re}\{x(t)\}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}(c_k + c^*_{-k})$
$j\mathfrak{Im}\{x(t)\}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}(c_k - c^*_{-k})$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$\Longleftrightarrow$	$j\frac{2\pi k}{T} c_k$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$ mit $c_0 = 0$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{T}{j2\pi k} c_k$

Einige Fourierreihen [1]

$e^{j\frac{2\pi}{T}t}$	$\Longleftrightarrow$	$\delta[k-1]$
$\cos\frac{2\pi}{T}t$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$
$\sin\frac{2\pi}{T}t$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2j}\delta[k-1] - \frac{1}{2j}\delta[k+1]$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{T} \quad \forall k$
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \le T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \le \frac{T}{2} \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\sin\frac{2\pi k}{T}T_1}{k\pi}$
$\left\lvert\cos\frac{2\pi}{T}t\right\rvert \quad$ (Periode $\frac{T}{2}$)	$\Longleftrightarrow$	$\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{1-(2k)^2}$

[1] Die Funktion $\delta[\cdot]$ ist der Einsimpuls für diskrete Argumente bzw. $\delta(\cdot)$ die Diracsche Deltafunktion für kontinuierliche Argumente.

2 Fouriertransformation zeitkontinuierlicher Signale

$x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$	$\Longleftrightarrow$	$X(j\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$
$x(t - T_0)$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\omega T_0} X(j\omega)$
$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X(j(\omega - \omega_0))$
$x^*(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X^*(-j\omega)$
$x(-t)$	$\Longleftrightarrow$	$X(-j\omega)$
$x(at)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{\|a\|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
$(x * y)(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
$x(t)y(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi}(X * Y)(j\omega)$
$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(-t))$	$\Longleftrightarrow$	$\mathfrak{Re}\{X(j\omega)\}$
$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x^*(-t))$	$\Longleftrightarrow$	$j\mathfrak{Im}\{X(j\omega)\}$
$\mathfrak{Re}\{x(t)\}$	$\Longleftrightarrow$	$X_e(j\omega) = \frac{1}{2}(X(j\omega) + X^*(-j\omega))$
$j\mathfrak{Im}\{x(t)\}$	$\Longleftrightarrow$	$X_o(j\omega) = \frac{1}{2}(X(j\omega) - X^*(-j\omega))$
$tx(t)$	$\Longleftrightarrow$	$j\dfrac{dX(j\omega)}{d\omega}$
$\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\Longleftrightarrow$	$(j\omega)^n X(j\omega)$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

Einige Fouriertransformationspaare

$\delta(t - T_0)$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\omega T_0}$
$e^{j\omega_0 t}$	$\Longleftrightarrow$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\Longleftrightarrow$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
$\sin \omega_0 t$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$
$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{2\pi}{T} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \dfrac{2\pi k}{T}\right)$
$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{j\frac{2\pi k}{T} t}$	$\Longleftrightarrow$	$2\pi \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \delta\left(\omega - \dfrac{2\pi k}{T}\right)$
$\sigma(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\mathrm{sign}(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{-at}\sigma(t), \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{a + j\omega}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}\sigma(t), \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{(a + j\omega)^n}$

Einige Fouriertransformationspaare (Fortsetzung)

$$e^{-a|t|}, \quad \mathfrak{Re}\{a\} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$$\frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad \Longleftrightarrow \quad X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\,\frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_1} & |t| \leq T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad 4\,\frac{\sin^2 \frac{\omega T_1}{2}}{T_1 \omega^2}$$

$$e^{-at^2}, \quad a > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \quad \Longleftrightarrow \quad (j\omega)^n$$

$$t^n \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi j^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$$

$$|t| \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{2}{\omega^2}$$

Dualität der Fouriertransformation

Die folgenden Korrespondenzen sind äquivalent.

$$x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(j\omega)$$

$$X(jt) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi x(-\omega)$$

$$\tfrac{1}{2\pi} X(-jt) \quad \Longleftrightarrow \quad x(\omega)$$

Parsevalsche Beziehung für aperiodische Signale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Parsevalsche Beziehung für periodische Signale

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Poissonsche Summenformel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \qquad \text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

3 Laplacetransformation

Angegeben sind die Grenzen des Konvergenzgebietes, wobei $s = \sigma + j\omega$ definiert ist. Die Grenzen können durchaus auch $\pm\infty$ sein. Wenn durch "mindestens" gekennzeichnet, kann der Konvergenzbereich in Einzelfällen auch größer als angegeben werden (zum Beispiel durch Auslöschung von Polstellen).

Zeitfunktion	$\Longleftrightarrow$	Laplacetransformierte	Konvergenzgebiet
$x(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$	$\mathcal{R}_x = \{s \,\vert\, R_{x-} < \sigma < R_{x+}\}$
$y(t)$	$\Longleftrightarrow$	$Y(s)$	$\mathcal{R}_y = \{s \,\vert\, R_{y-} < \sigma < R_{y+}\}$
$ax(t) + by(t)$	$\Longleftrightarrow$	$aX(s) + bY(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y$
$x(t - T_0)$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-sT_0}X(s)$	$\mathcal{R}_x$
$e^{s_0 t}x(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X(s - s_0)$	$\{s \,\vert\, R_{x-} < \sigma - \mathfrak{Re}\{s_0\} < R_{x+}\}$
$x^*(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X^*(s^*)$	$\mathcal{R}_x$
$x(at)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{\vert a\vert} X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\left\{s \,\vert\, R_{x-} < \mathfrak{Re}\left\{\frac{s}{a}\right\} < R_{x+}\right\}$
$(x * y)(t)$	$\Longleftrightarrow$	$X(s)Y(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$\Longleftrightarrow$	$sX(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x$
$-tx(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{d}{ds}X(s)$	$\mathcal{R}_x$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}X(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x \cap \{s \,\vert\, \sigma > 0\}$

Einseitige Laplacetransformation

Für Signale, die für $t < 0$ identisch 0 sind, ist die einseitige Laplacetransformation identisch mit der gewöhnlichen (zweiseitigen) Laplacetransformation.

Merke: Konvergenzgebiet der einseitigen Laplacetransformation ist immer eine *rechte* Halbebene.

Obige Eigenschaften gelten weiter, bis auf folgende Ausnahmen:

Zeitfunktion	$\Longleftrightarrow$	Laplacetransformierte	Konvergenzgebiet
$x(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$	$\mathcal{R}_x = \{s \,\vert\, \sigma > R_{x-}\}$
$y(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{Y}(s)$	$\mathcal{R}_y = \{s \,\vert\, \sigma > R_{y-}\}$
$x(at), \quad a > 0$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{a}\mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$	$\left\{s \,\vert\, \mathfrak{Re}\left\{\frac{s}{a}\right\} > R_{x-}\right\}$
$(x * y)(t)^\dagger$	$\Longleftrightarrow$	$\mathcal{X}(s)\mathcal{Y}(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x \cap \mathcal{R}_y$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$\Longleftrightarrow$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$	mindestens $\mathcal{R}_x$
$\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}\mathcal{X}(s)$	mindestens $\mathcal{R}_x \cap \{s \,\vert\, \sigma > 0\}$

†Nur unter der Voraussetzung, daß $y(t) = 0$ und $x(t) = 0$ für $t < 0$

Die folgenden drei Sätze gelten sowohl für die ein- wie auch beidseitige Laplacetransformation $\mathcal{X}(s)$ bzw. $X(s)$.

Inverse Laplacetransformation

Wählt man σ so, daß die Integrationskontur im Konvergenzgebiet liegt (aber ansonsten beliebig), so gilt (bei der einseitigen Laplacetransformation für $t > 0$)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

Anfangswertsatz

Ist $x(t) = 0$ für $t < 0$ und existiert $\lim\limits_{t \to 0^+} x(t)$, so gilt

$$\lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

Endwertsatz

Ist $x(t) = 0$ für $t < 0$ und existiert $\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$, so gilt

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Einige Laplacetransformationspaare

Zeitfunktion	$\Longleftrightarrow$	Laplacetransformierte	Konvergenzgebiet
$\delta(t)$	$\Longleftrightarrow$	1	alle s
$\sigma(t)^\dagger$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$\sigma(-t)$	$\Longleftrightarrow$	$-\frac{1}{s}$	$\sigma < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\sigma(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\sigma(-t)$	$\Longleftrightarrow$	$-\frac{1}{s^n}$	$\sigma < 0$
$e^{-\alpha t}\sigma(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\sigma > -\alpha$
$e^{-\alpha t}\sigma(-t)$	$\Longleftrightarrow$	$-\frac{1}{s+\alpha}$	$\sigma < -\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\sigma(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\sigma > -\alpha$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}\sigma(-t)$	$\Longleftrightarrow$	$-\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\sigma < -\alpha$
$(\cos\omega_0 t)\,\sigma(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$(\sin\omega_0 t)\,\sigma(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$(e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t)\,\sigma(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > -\alpha$
$(e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t)\,\sigma(t)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\sigma > -\alpha$
$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$	$\Longleftrightarrow$	s^n	alle s
$\underbrace{\sigma(t) * \cdots * \sigma(t)}_{n \text{ mal}}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma > 0$

†Mit $\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ wird die Sprungfunktion bezeichnet, nicht zu verwechseln mit $\sigma = \mathfrak{Re}\{s\}$.

4 Fourierreihen zeitdiskreter periodischer Signale

$x[n] = x[n+N] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$	$\Longleftrightarrow$	$c_k = c_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$
$x[n-N_0]$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0}\, c_k$
$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}\, x[n]$	$\Longleftrightarrow$	c_{k-m}
$x^*[n]$	$\Longleftrightarrow$	c^*_{-k}
$x[-n]$	$\Longleftrightarrow$	c_{-k}
$\sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[n-k]$	$\Longleftrightarrow$	$Nc_kd_k,\quad x,\, y$ gleiche Periode
$x[n]y[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\sum_{l=0}^{N-1} c_l\, d_{k-l},\quad x,\, y$ gleiche Periode
$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$\Longleftrightarrow$	$\mathfrak{Re}\{c_k\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$\Longleftrightarrow$	$j\mathfrak{Im}\{c_k\}$
$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}(c_k + c^*_{-k})$
$j\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}(c_k - c^*_{-k})$
$x[n] - x[n-1]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\right) c_k$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ mit $c_0 = 0$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{1 - e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} c_k$

Einige Fourierreihen[2]

$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}$	$\Longleftrightarrow$	$\delta[k-m]$
$\cos\frac{2\pi m}{N}n$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}\delta[k-m] + \frac{1}{2}\delta[k+m]$
$\sin\frac{2\pi m}{N}n$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2j}\delta[k-m] - \frac{1}{2j}\delta[k+m]$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{N}\quad \forall k$
$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & N_1 < \lvert n\rvert \le \frac{N}{2} \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{N}\,\frac{\sin(2N_1+1)\frac{\pi k}{N}}{\sin\frac{\pi k}{N}}$

Parsevalsche Beziehung für periodische zeitdiskrete Signale

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \lvert c_k\rvert^2$$

[2]Bei den Beziehungen ist die Periodizität von c_k mit der Periode N zu berücksichtigen. Die Funktion $\delta[\cdot]$ ist der Einsimpuls.

5 Fouriertransformation zeitdiskreter Signale

$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\theta})\, e^{j\theta n} d\theta$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\theta n}$
$x[n-N_0]$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\theta N_0} X(e^{j\theta})$
$e^{j\theta_0 n} x[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{j(\theta-\theta_0)})$
$x^*[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X^*(e^{-j\theta})$
$x[-n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{-j\theta})$
$(x*y)[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta})$
$x[n]y[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi}(X*Y)(e^{j\theta})$ (siehe [3])
$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$\Longleftrightarrow$	$\mathfrak{Re}\{X(e^{j\theta})\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$\Longleftrightarrow$	$j\mathfrak{Im}\{X(e^{j\theta})\}$
$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\Longleftrightarrow$	$X_e(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\theta}) + X^*(e^{-j\theta}))$
$j\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\Longleftrightarrow$	$X_o(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\theta}) - X^*(e^{-j\theta}))$
$nx[n]$	$\Longleftrightarrow$	$j\frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta}$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{1-e^{-j\theta}}X(e^{j\theta}) + \pi X(e^{j0})\delta_{2\pi}(\theta)$

Einige Fouriertransformationen[4]

$\delta[n-N_0]$	$\Longleftrightarrow$	$e^{-j\theta N_0}$
$e^{j\theta_0 n}$	$\Longleftrightarrow$	$2\pi\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0)$
$\cos\theta_0 n$	$\Longleftrightarrow$	$\pi\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) + \pi\delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)$
$\sin\theta_0 n$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{j}\delta_{2\pi}(\theta-\theta_0) - \frac{\pi}{j}\delta_{2\pi}(\theta+\theta_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)$
$\sigma[n]$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi\delta_{2\pi}(\theta)$
$a^n\sigma[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{1-ae^{-j\theta}}$
$\frac{\sin\alpha n}{\pi n}, \quad 0<\alpha<\pi$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 \le \lvert\theta\rvert \le \alpha \\ 0, & \alpha < \lvert\theta\rvert < \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\sin(2N_1+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

[3]Bei dieser Faltung im periodischen Frequenzbereich handelt es sich um die *periodische Faltung*, definiert durch $(X*Y)(e^{j\theta}) = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\tau})Y(e^{j(\theta-\tau)})d\tau$

Parsevalsche Beziehung für aperiodische zeitdiskrete Signale

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|X(e^{j\theta})\right|^2 d\theta$$

Spektrum abgetasteter zeitkontinuierlicher Signale

Wird ein zeitkontinuierliches Signal $x_c(t)$ mit der Rate $\frac{1}{T}$ abgetastet, so gilt zwischen der zeitdiskreten Fouriertransformation des entstandenen zeitdiskreten Signals $x_d[n] = x_c(nT)$ und der Fouriertransformation des zeitkontinuierlichen Signals die Beziehung

$$X_d(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\theta - 2\pi k}{T}\right)$$

[4] Bei den Beziehungen ist die 2π–Periodizität im Frequenzbereich zu berücksichtigen. Die Funktion $\delta[\cdot]$ ist der Einsimpuls für diskrete Argumente bzw. $\delta(\cdot)$ die Diracsche Deltafunktion für kontinuierliche Argumente. $\delta_{2\pi}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi k)$.

6 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

In den Beziehungen sind $x[n]$ und $y[n]$ N-Punkte-Signale, d.h. sie haben nur N von Null verschiedene Werte. Die Notation $x[[n]]_N = x[n \text{ modulo } N]$ ist die periodische Fortsetzung des N-Punkte Signals $x[n]$. Es gilt[5]

$$x[n] = x[[n]]_N \sqcap_N[n].$$

Merkregel: In den DFT-Formeln ist ein N-Punkte Signal stets als eine Periode eines periodischen zeitdiskreten Signals zu betrachten.

$x[n] = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi k}{N}n}\right) \sqcap_N[n]$	$\Leftrightarrow$	$X[k] = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}\right) \sqcap_N[k]$
$x[[n-N_0]]_N \sqcap_N[n]$	$\Leftrightarrow$	$e^{-j\frac{2\pi k}{N}N_0}\, X[k]$
$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}\, x[n]$	$\Leftrightarrow$	$X[[k-m]]_N \sqcap_N[k]$
$x^*[n]$	$\Leftrightarrow$	$X^*[[-k]]_N \sqcap_N[k]$
$x^*[[-n]]_N \sqcap_N[n]$	$\Leftrightarrow$	$X^*[k]$
$\left(\sum_{m=0}^{N-1} x[[m]]_N\, y[[n-m]]_N\right) \sqcap_N[n]$	$\Leftrightarrow$	$X[k]Y[k]$
$x[n]y[n]$	$\Leftrightarrow$	$\left(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[[m]]_N Y[[k-m]]_N\right) \sqcap_N[k]$
$x_e[n] = \frac{1}{2}\big(x[[n]]_N + x^*[[-n]]_N\big) \sqcap_N[n]$	$\Leftrightarrow$	$\mathfrak{Re}\{X[k]\}$
$x_o[n] = \frac{1}{2}\big(x[[n]]_N - x^*[[-n]]_N\big) \sqcap_N[n]$	$\Leftrightarrow$	$j\mathfrak{Im}\{X[k]\}$
$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2}\big(X[[k]]_N + X^*[[-k]]_N\big) \sqcap_N[k]$
$j\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2}\big(X[[k]]_N - X^*[[-k]]_N\big) \sqcap_N[k]$

Einige DFT Beispiele[6]

$e^{j\frac{2\pi m}{N}n}$	$\Longleftrightarrow$	$N\delta[k-m]$
$\cos\frac{2\pi m}{N}n$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{N}{2}\delta[k-m] + \frac{N}{2}\delta[k+m-N]$
$\sin\frac{2\pi m}{N}n$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{N}{2j}\delta[k-m] - \frac{N}{2j}\delta[k+m-N]$
$\delta[n]$	$\Longleftrightarrow$	1
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N_1 \\ 1, & N-N_1 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{\sin(2N_1+1)\frac{\pi k}{N}}{\sin\frac{\pi k}{N}}$

[5]mit der Rechteckfunktion $\sqcap_N[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

[6]In den Formeln gilt $0 \le n \le N-1$, $0 \le k \le N-1$ und $0 \le m \le N-1$.

7 $\mathcal{Z}$–Transformation

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathcal{C}} X(z) z^{n-1} dz \qquad \Longleftrightarrow \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Die in der Tabelle angegebenen Bereiche sind die Konvergenzringe der zweiseitigen $\mathcal{Z}$–Transformation und können in einzelnen Fällen auch größer sein.

$x[n]$	$\Leftrightarrow$	$X(z)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$y[n]$	$\Leftrightarrow$	$Y(z)$	$R_{y_-} < \lvert z\rvert < R_{y_+}$
$ax[n] + by[n]$	$\Leftrightarrow$	$aX(z) + bY(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < \lvert z\rvert < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
$x[n+n_0]$	$\Leftrightarrow$	$z^{n_0} X(z)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$z_0^n x[n]$	$\Leftrightarrow$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$\lvert z_0\rvert R_{x_-} < \lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert R_{x_+}$
$nx[n]$	$\Leftrightarrow$	$-z\,\frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$x^*[n]$	$\Leftrightarrow$	$X^*(z^*)$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$x[-n]$	$\Leftrightarrow$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_{x_+}} < \lvert z\rvert < \frac{1}{R_{x_-}}$
$\mathfrak{Re}\{x[n]\}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2}(X(z) + X^*(z^*))$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$j\mathfrak{Im}\{x[n]\}$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2}(X(z) - X^*(z^*))$	$R_{x_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}$
$(x * y)[n]$	$\Leftrightarrow$	$X(z)Y(z)$	$\max(R_{x_-}, R_{y_-}) < \lvert z\rvert < \min(R_{x_+}, R_{y_+})$
$x[n]\,y[n]$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathcal{C}} \frac{X(v)}{v} Y\left(\frac{z}{v}\right) dv$	$R_{x_-}R_{y_-} < \lvert z\rvert < R_{x_+}R_{y_+}$
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{1-z^{-1}}\,X(z)$	$\max(R_{x_-}, 1) < \lvert z\rvert < R_{x_+}$

Zeitverschiebung für die einseitige $\mathcal{Z}$–Transformation

$$x[n+n_0] \quad \Leftrightarrow \quad z^{n_0}\left(X(z)-\sum_{n=0}^{n_0-1}x[n]z^{-n}\right), \quad n_0>0$$

$$x[n-n_0] \quad \Leftrightarrow \quad z^{-n_0}\left(X(z)+\sum_{n=1}^{n_0}x[-n]z^{n}\right), \quad n_0>0$$

Residuensatz für die inverse $\mathcal{Z}$–Transformation

Rechtsseitiges Signal ($x[n]=0$ für $n<0$):

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathcal{C}}X(z)z^{n-1}\,dz=\sum_{|z_k|<R_x}\text{Res}_k\{X(z)z^{n-1}\} \quad n=0,1,2,3\ldots$$

Alle Residuen im Gebiet innerhalb von $\mathcal{C}$ werden aufsummiert, wobei der Radius von $\mathcal{C}$ größer als der Konvergenzradius R_x sein muß.

Linksseitiges Signal ($x[n]=0$ für $n>0$):

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\mathcal{C}'}X\left(\frac{1}{z}\right)z^{-n-1}\,dz=\sum_{|z_k'|<R_x'=\frac{1}{R_x}}\text{Res}_k\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)z^{-n-1}\right\} \quad n=0,-1,-2,-3\ldots$$

Alle Residuen im Gebiet innerhalb von $\mathcal{C}'$ werden aufsummiert, wobei der Radius von $\mathcal{C}'$ größer als $\frac{1}{R_x}$ sein muß.

Achtung: Durch $z^{\pm n-1}$ kann für $n=0$ ein zusätzlicher Pol bei $z=0$ auftreten. Daher sollte bei der inversen $\mathcal{Z}$–Transformation der Fall $n=0$ getrennt behandelt werden!

Einfacher Pol $z_{\infty k}$ von $X(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$:

$$\text{Res}_k\{X(z)z^{n-1}\}=\lim_{z\to z_{\infty k}}\left((z-z_{\infty k})\frac{P(z)}{Q(z)}z^{n-1}\right)$$

M–facher Pol $z_{\infty k}$ von $X(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$:

$$\text{Res}_k\{X(z)z^{n-1}\}=\frac{1}{(M-1)!}\frac{d^{M-1}}{dz^{M-1}}\left((z-z_{\infty k})^M\frac{P(z)}{Q(z)}z^{n-1}\right)\Bigg|_{z\to z_{\infty k}}$$

Residuum im Unendlichen:

$$\text{Res}_{z=\infty}\{X(z)z^{n-1}\}=-\text{Res}_{z=0}\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)z^{-n-1}\right\}$$

Anfangswertsatz der einseitigen $\mathcal{Z}$–Transformation

$$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$$

Endwertsatz der einseitigen $\mathcal{Z}$–Transformation

$$\lim_{n\to\infty}x[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

Eingeschaltetes periodisches Signal

$$x[n]=x_p(n)\sigma[n] \quad \Longleftrightarrow \quad X(z)=\frac{z^N}{z^N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x_p(n)z^{-n}\right), \text{ mit } x_p(n)=x_p(n+N)$$

Einige $\mathcal{Z}$–Transformationspaare

$\delta[n]$	$\Leftrightarrow$	1	$\forall z$
$\sigma[n]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$-\sigma[-n-1]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\| < 1$
$\alpha^n \sigma[n]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{z}{z-\alpha}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
$-\alpha^n \sigma[-n-1]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{z}{z-\alpha}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
$n\sigma[n]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| > 1$
$-n\sigma[-n-1]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\| < 1$
$\sin \alpha n \ \sigma[n]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{z \sin \alpha}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$	$\|z\| > 1$
$\cos \alpha n \ \sigma[n]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{z(z - \cos \alpha)}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$	$\|z\| > 1$
$\rho^n \sin \alpha n \ \sigma[n]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{\rho z \sin \alpha}{z^2 - 2\rho z\cos\alpha + \rho^2}$	$\|z\| > \rho$
$\rho^n \cos \alpha n \ \sigma[n]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{z(z - \rho\cos \alpha)}{z^2 - 2\rho z\cos\alpha + \rho^2}$	$\|z\| > \rho$
$\sin(\alpha n + \varphi) \ \sigma[n]$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{z^2 \sin\varphi + z\sin(\alpha - \varphi)}{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}$	$\|z\| > 1$
$\dfrac{1}{n}, \quad n > 0$	$\Leftrightarrow$	$\log_e \dfrac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$\dfrac{1 - e^{-\alpha n}}{n} \ \sigma[n]$	$\Leftrightarrow$	$\alpha + \log_e \dfrac{z - e^{-\alpha}}{z-1}$	$\|z\| > 1, \ \alpha > 0$
$\dfrac{\sin \alpha n}{n} \ \sigma[n]$	$\Leftrightarrow$	$\alpha + \arctan\left(\dfrac{\sin\alpha}{z - \cos\alpha}\right)$	$\|z\| > \cos\alpha$ $\alpha > 0$

Normierte Form der bilinearen $\mathcal{Z}$–Transformation

Mit

$$s = \frac{1}{v}\,\frac{z-1}{z+1}, \qquad v = \tan \pi \frac{f_g}{f_s}$$

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{1}{v}\,\frac{z-1}{z+1}}$$

wird ein analoges Filter mit der Übertragungsfunktion $H_a(s)$ (dabei ist $s/2\pi$ normiert auf die analoge Bezugsfrequenz f_{ag}) in ein digitales Filter mit der Übertragungsfunktion $H(z)$ und der Bezugsfrequenz f_g übergeführt (f_s ist die Abtastfrequenz).

8 Systeme mit Mehrfachtaktverarbeitung

In den angegebenen Formeln sind der Unterabtastfaktor M und der Überabtastfaktor L ganzzahlig.

$x[n]$	$\Longleftrightarrow$	$X(e^{j\theta})$
	$\Longleftrightarrow$	$X(z)$
$y[m] = x[Mm]$	$\Longleftrightarrow$	$Y(e^{j\theta'}) = \dfrac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j(\theta'-2\pi k)/M}\right)$
	$\Longleftrightarrow$	$Y(z) = \dfrac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{-j2\pi k/M} z^{1/M}\right)$
$y[m] = \begin{cases} x\left[\frac{m}{L}\right], & m = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\Longleftrightarrow$	$Y(e^{j\theta'}) = X\left(e^{j\theta' L}\right)$
	$\Longleftrightarrow$	$Y(z) = X\left(z^L\right)$