Eigenbewegungen (Laborübung 5)

Theorie: Freie Schwingungen eines linearen Schwingungssystems mit N Freiheitsgraden

Ein lineares Schwingungssystem besteht aus k Massen, die den Freiheitsgrad f besitzten. Zwischen den Massen existieren n Bindungsgleichungen. Dann besitzt das System den Freiheitsgrad N:

$$N = k \ f \quad n$$

Es gilt dann:

Das System wird durch N Bewegungskoordinaten x_i beschrieben.

Es existieren N linear unabhängige Linearkombinationen $q_i = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j$ für die jeweils die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators gilt:

$$q_i \quad \omega_i^2 q_i = 0 \quad .$$

Es existieren N Eigenfrequenzen ω_i und N Normalschwingungen der Form: $q_i = A_i \cos(\omega_i \ t \quad {}_i)$

Die Amplitude A_i und die Phasen ${}_i$ sind von den Anfangsbedingungen abhängig.

Falls die Anfangsbedingungen so gewählt werden, dass nur eine einzige Normalschwingung angeregt wird, schwingt jede der Bewegungskoordinaten in Phase harmonisch mit der Eigenfrequenz ω_i dieser Normalschwingung.

Die allgemeine Bewegung des Systems kann als Superposition der Normalschwingungen dargestellt werden. Jede allgemeine Bewegung ist also eine lineare Überlagerung der Normalschwingungen des Systems.

Die Energie einer Superposition von Normalschwingungen ist die Summe der Energien der einzelnen Normalschwingungen.

Weitere Informationen zu diesem Thema können im Kapitel 2 „*Schwingungen“,* des Skriptes zu der Vorlesung Physik I (SS 2002), von Prof. P. Günter, nachgelsesen werden.

Aufgabe 5.1

Die obere Theorie wird nun auf unsere Schwingungssysteme angewendet. Jede Masse besitzt den Freiheitsgrad f=1, weil die Auslenkung nur in x-Richtung erfolgen kann. Es existieren keine Bindungsgleichungen n, da die Verbindung der einzelnen Massen nicht starr ist, sondern über Federn erfolgt. Deshalb gilt:

Schwingungssystem	***Freiheitsgrad des Systems***	***Anzahl Normalschwingungen***
Doppelschwinger	$N = 2 \ f \quad 0 = 2$	2
Dreifachschwinger	$N = 3 \ f \quad 0 = 3$	3
Vierfachschwinger	$N = 4 \ f \quad 0 = 4$	4
...	...	...
k-fach-Schwinger	$N = k \ f \quad 0 = k$	k

Wir verfizieren nun unsere Resultate, indem wir die Normalschwingungen eines Sechsfachschwingers analysieren. Das DGL-System lautet:

(1) $m_1\ x_1 = \ \ x_1\ k_0\ \ (x_2\ \ x_1)\ k$

(2) $m_2\ x_2 = \ (x_2\ \ x_1)\ k\ \ (x_3\ \ x_2)\ k$

(3) $m_3\ x_3 = \ (x_3\ \ x_2)\ k\ \ (x_4\ \ x_3)\ k$

(4) $m_4\ x_4 = \ (x_4\ \ x_3)\ k\ \ (x_5\ \ x_4)\ k$

(5) $m_5\ x_5 = \ (x_5\ \ x_4)\ k\ \ (x_6\ \ x_5)\ k$

(6) $m_6\ x_6 = \ \ x_6\ k_0\ \ (x_6\ \ x_5)\ k$

Die Federn an den Enden des Schwingsystems haben die Federkonstante k_0. Für die restlichen Federn sei die Federkonstante k.

In Matrixform erhalten wir:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(k\ \ k_0)}{m_1} & 0 & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & \frac{2k}{m_2} & 0 & \frac{k}{m_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_3} & 0 & \frac{2k}{m_3} & 0 & \frac{k}{m_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m_4} & 0 & \frac{2k}{m_4} & 0 & \frac{k}{m_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m_5} & 0 & \frac{2k}{m_5} & 0 & \frac{k}{m_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m_6} & 0 & \frac{(k\ \ k_0)}{m_6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Das m-File lautet also:

```
% Sechsfachschwinger
% von Stephan Senn

% Angaben zum Schwinger
k=10;
k0=1;
m1=1; m2=1; m3=1; m4=1; m5=1; m6=1;
% Matrix A
```

```
A=[0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   -(k+k0)/m1 0 k/m1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
   k/m2 0 -2*k/m2 0 k/m2 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
   0 0 k/m3 0 -2*k/m3 0 k/m3 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
   0 0 0 0 k/m4 0 -2*k/m4 0 k/m4 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
   0 0 0 0 0 0 k/m5 0 -2*k/m5 0 k/m5 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
   0 0 0 0 0 0 0 0 k/m6 0 -(k+k0)/m6 0];

B=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
C=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
   0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0];

D=0;
sys=ss(A,B,C,D);
x0=[1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0];  % Startbedingung
t=0:0.0001:100;  % Samplerate
initial(sys,x0,t);
```

Wir dimensionieren das System wie folgt:

Federkonstante k=10N/cm

Federkonstante k_0=1N/cm

Auslenkungen in [cm]

Masse in [kg]

Nun wählen wir die Anfangsbedingungen so, dass jede Masse mit genau derselben Frequenz, also mit einer Normalschwingung, schwingt. Man bezeichnet eine solche Bewegung des Systems auch als Eigenbewegung. Der Sechsfachschwinger besitzt 6 Normalschwingungen. Die 6 Startbedingungen lauten:

Fall 1: x0=[1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0]

Fall 2: x0=[1 0 -1 0 1 0 -1 0 1 0 -1 0]

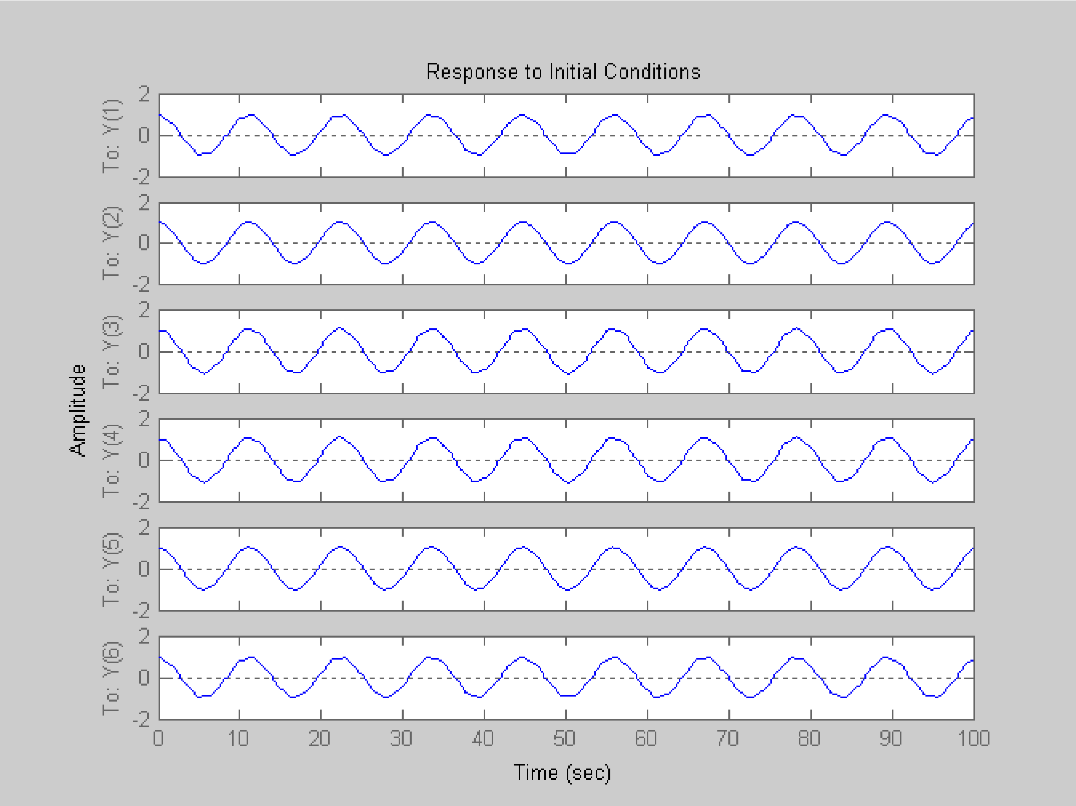
Fall 3: x0=[1 0 1 0 1 0 -1 0 -1 0 -1 0]

Fall 4: x0=[-1 0 -1 0 -1 0 1 0 1 0 1 0]

Fall 5: x0=[-1 0 1 0 -1 0 1 0 -1 0 1 0]

Fall 6: x0=[-1 0 0 0 -1 0 1 0 0 0 1 0]

Für den Fall 1 erhalten wir:



Alle Massen schwingen mit derselben Frequenz. Die Amplitude bleibt gleich. Für die Fälle 2 bis 6 erhalten wir ähnliche Resultate. Allerdings treten hier Phasenunterschiede auf. Aus Platzgründen wurden die restlichen Grafen nicht gezeichnet.

Bei Eigenbewegungen werden also die einzelnen Massen so ausgelenkt, dass alle Massen mit derselben Frequenz schwingen. Eine beliebige Bewegung des Systems ist eine lineare Überlagerung der einzelnen Normalschwingungen. Diese Superposition der Normalschwingungen ist uns schon bei der letzten Laborübung begegnet. Der Fall 1 beim Doppelschwinger führte zu einer allgemeinen periodischen Schwingung des Systems. Diese Bewegung ist also eine Superposition der Normalschwingungen bzw. der Eigenbewegungen der Fälle 2 und 3.

Aufgabe 5.2

Die meisten Fragen zu dieser Aufgabe sind schon in der vorherigen Teilaufgabe besprochen worden. Hier ist noch einmal eine kurze stichwortartige Zusammenfassung:

In der Systemmatrix A eines Sechsfachschwinger werden die Massen Federnkonstanten abgespeichert. Und diese Parameter haben einen Einfluss auf das Endresulltat

Die Eigenbewegungungen eines Schwingungssystems sind linear unabhängig.

Eine A Matrix der Grösse $n \; n$ hat $n/2$ Eigenbewegungen.

Ein Modi wird durch die Dämpfung und die Anfangsbedingung charakterisiert.

Damit am Ausgang nur ein Modus erscheint müssen die Anfangsbedingungen so gewählt werden, dass nur eine einzige Normalschwingung angeregt wird. Das heisst

Die invarianten Unterräume eines dynamischen Systems sind die Normalschwingungen. Diese Schwingungen können mit bestimmten Anfangsbedingungen erzwungen werden.

Aufgabe 5.3

Die komplexen Eigenvektoren erweisen sich in der Praxis als wenig hilfreich. Um sie anschaulich zu machen, transformiert man sie in den reellen Raum. Hier können, analog zu den reellen Eigenvektoren, Aussagen über das Verhalten eines System bestimmt werden. Man zerlegt dazu den konjugiert-komplexen Eigenvektor in zwei reelle Vektoren:

(1) $t = v \pm jw \quad , \quad v,w \qquad .$

Auch der konjugiert-komplexe Eigenwert wird in zwei reelle Zahlen aufgeteilt:

(2) $z = \sigma \pm j\omega \quad , \quad \sigma , \omega$

Es gilt nun:

(3) $A \; t = z \; t$

Wir setzen nun die Beziehungen (1) und (2) in (3) ein und erhalten:

(4) $A \; (v \pm jw) = (\sigma \pm j\omega) \; (v \pm jw)$

(4) $Av \pm jAw = \sigma v \quad \omega w \pm j\omega v \pm j\sigma w$

Der Realteil von (4) ergibt:

(4a) $Av = \sigma v \quad \omega w$

(4b) $Aw = \omega v \quad \sigma w$

In Matrixform erhalten wir also:

(4c) $A \; [v \quad w] = [v \quad w] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix}$

Die neuen Eigenvektoren v und w sind reell und können nun zur Analyse des Systems verwendet werden.

Das folgende Beispiel soll diese Transformation nochmals veranschaulichen.

Beispiel

Gegenben sei eine Matrix A:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren lauten:

EW1: -2,	EV1: [0,0,1]
EW2: -1-j	EV2: [-j,1,1]
EW3: 1-j	EV3: [j,1,1]

Für den komplexen Eigenvektor 2 (EV2) gilt:

$$v_2=[0,1,1] \quad , \quad w_2=[\ \ 1,0,0]$$

Für den komplexen Eigenvektor 3 (EV3) gilt:

$$v_3=[0,1,1] \quad , \quad w_2=[1,0,0]$$

Mit Hilfe von Matlab können wir zeigen, dass Gleichung (4c) richtig ist:

```
A=[-1 -1 0
   1 -1 0
   1 1 -2];

v2=[0;1;1];
w2=[-1;0;0];
v3=[0;1;1];
w3=[1;0;0];


T=[-1 1
   -1 -1];

disp('A*[v2 w2]:');
A*[v2 w2]
disp('[v2 w2]*T');
[v2 w2]*T
disp('A*[v3 w3]:');
A*[v3 w3]
disp('[v3 w3]*T');
[v3 w3]*T

% Ausgabe am Bildschirm
>> A*[v2 w2]:

ans =
   -1     1
   -1    -1
   -1    -1

[v2 w2]*T

ans =
    1     1
   -1     1
   -1     1
```

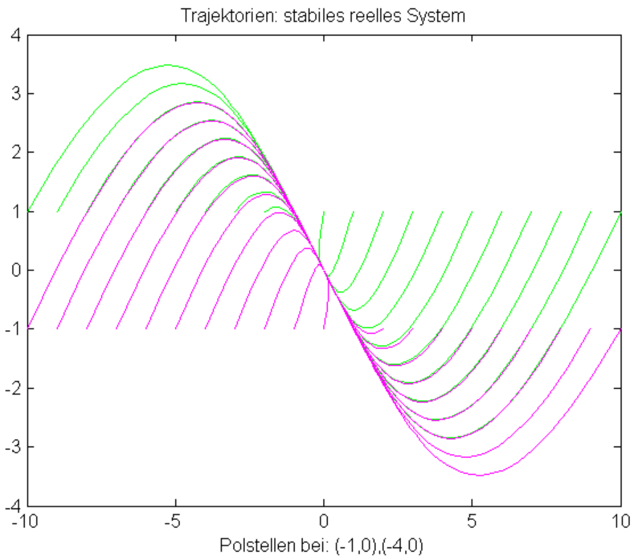
```
A*[v3 w3]:

ans =
   -1    -1
   -1     1
   -1     1

[v3 w3]*T

ans =
   -1    -1
   -1     1
   -1     1
```

Aufgabe 5.4

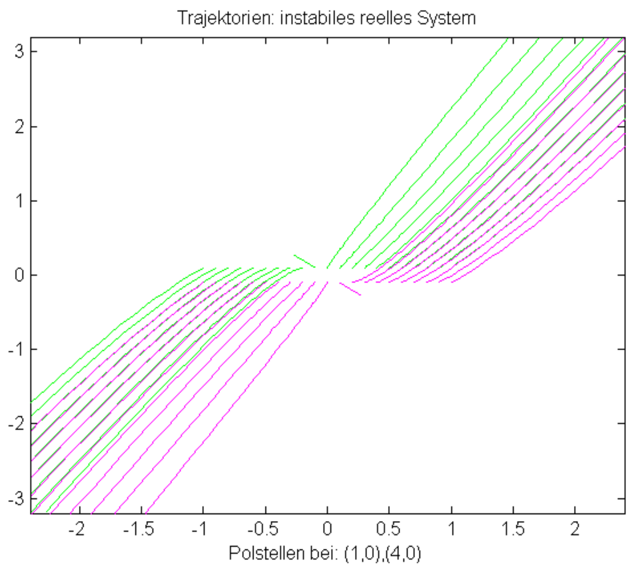
Mit Hilfe der Trajektorien kann auf anschauliche Weise die Stabilität eines Systems ermittelt werden. In den folgenden Graphiken sind die Resultate für Systeme 2.Ordnung zusammengefasst:

Für reelle Polstellen gilt:

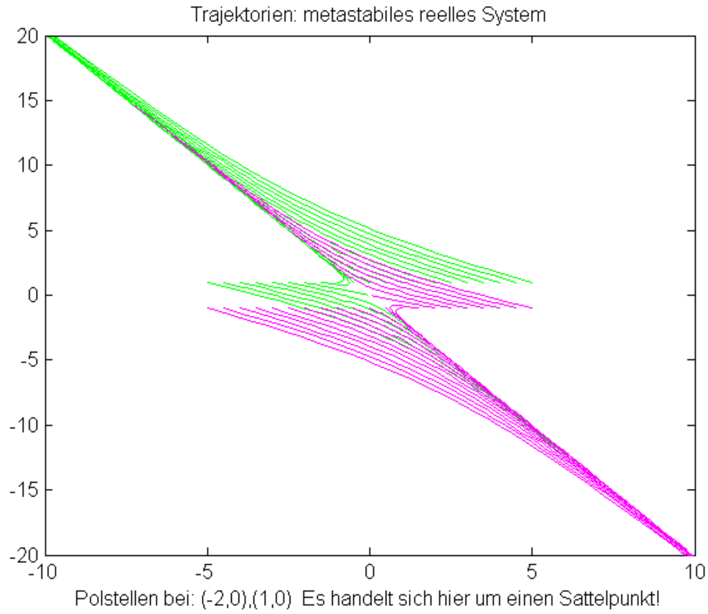
Stabiles System: Die Polstellen befinden sich in der linken Halbebene.



Instabiles System: Die Polstellen befinden sich in der rechten Halbebene.



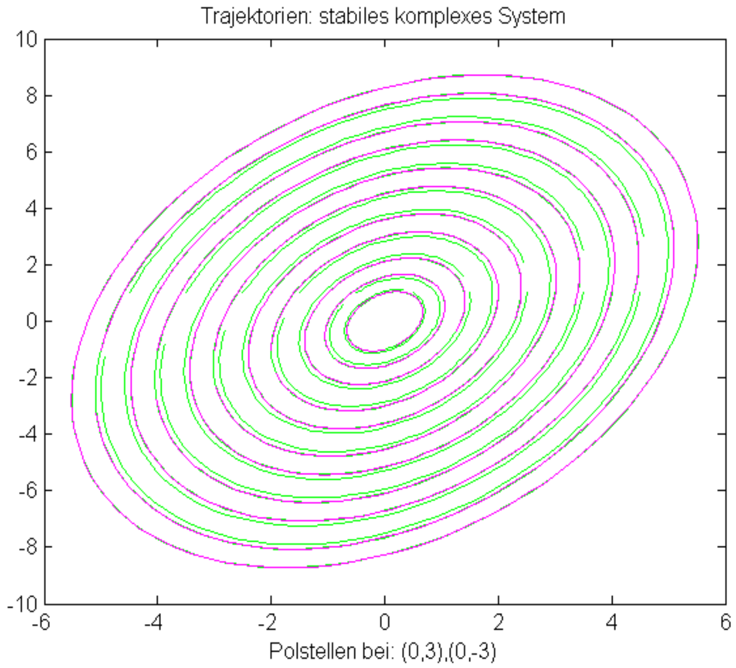
Metastabiles System: Eine Polstelle befindet sich in der linken und eine Polstelle in der rechten Halbebene. Es handelt sich um einen Sattelpunkt.



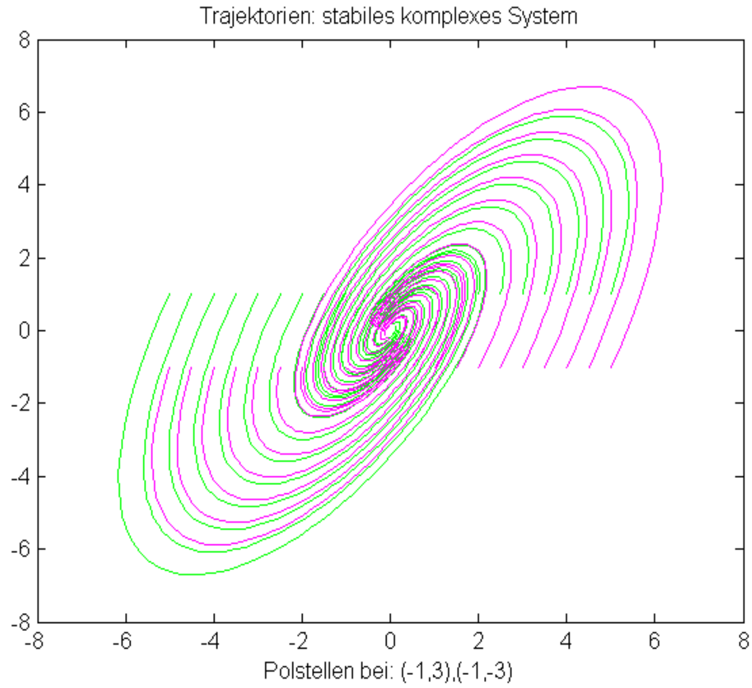
Für komplexe Polstellen gilt:

Die Polstellen sind immer konjugiert komplex.

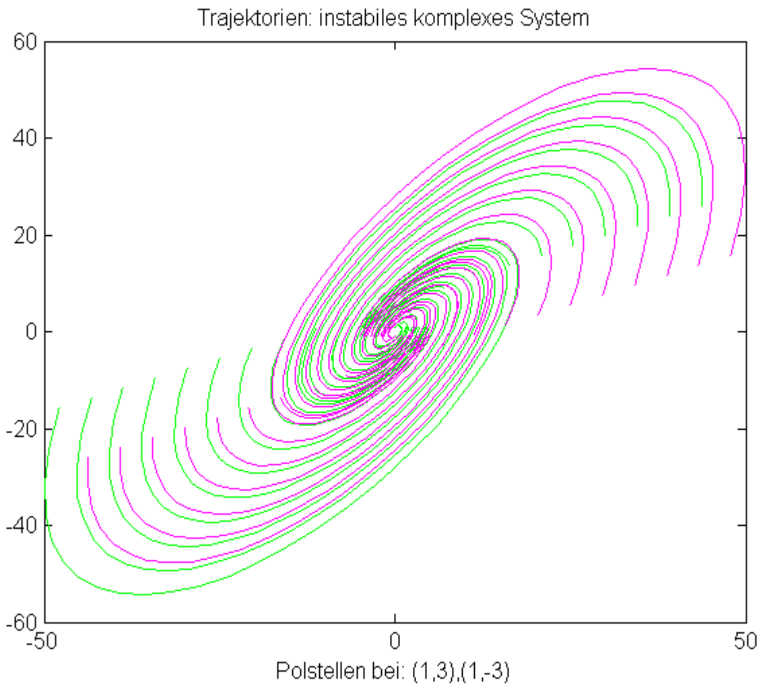
Stabiles System: Die Polstellen befinden sich in der linken Halbebene.



Instabiles System: Die Polstellen befinden sich in der rechten Halbebene. Die Trajektorien verlaufen nach innen.



Oszillierendes System: Die Polstellen sind rein imaginär. (Sie liegen auf der imaginären Achse.) Die Trajektorien verlaufen nach aussen.



Im folgenden wird noch das m-File abgredruckt:

```
% Trajektorien
% Laborübung 5
% von Stephan Senn

loop=1;
```

```
while loop
  hold off

k = menu('Alle Systeme sind von der Ordnung 2. Wählen Sie ein System:','stabiles System mit reellen Polstellen','instabiles System mit reellen Polstellen','metastabiles System mit reellen Polstellen','System mit rein imaginären Polstellen','stabiles System mit komplexen Polstellen','instabiles System mit komplexen Polstellen','Beenden')
clf
switch k

case 1
    A=[-2 -1;-2 -3];
    [v d]=eig(A);
    disp('Eigenvektoren:');
    v
    disp('Eigenwerte:');
    d
    B=[0 0;0 0];
    C=[1 0;0 1];
    D=0;
    sys1=ss(A,B,C,D);

    for i=-10:1:10
    x0=[i;1];
    [xx,t]=initial(sys1,x0,5);
    plot(xx(:,1),xx(:,2),'g')
    hold on
    end
    for i=-10:1:10
    x0=[i;-1];
    [xx,t]=initial(sys1,x0,5);
    plot(xx(:,1),xx(:,2),'m')
    hold on
    end
    title('Trajektorien: stabiles reelles System');
    xlabel('Polstellen bei: (-1,0),(-4,0)');
    but=1;
    disp('Trajektorien zeichnen:');
    disp('Linke Maustaste an einem Koordinatenpunkt drücken.');
    disp('Zum Beenden Rechte Maustaste drücken.');
    while but == 1
    [x0,y0,but] = ginput(1);
```

```
plot(x0,y0,'ro')
[xx,t]=initial(sys1,[x0;y0]);
plot(xx(:,1),xx(:,2),'b')
end

case 2
... (analog)
```

Für Systeme 3.Ordnung ergeben sich Trajektorien im Raum, da noch eine weitere Koordinate dazukommt. Systeme 3.Ordnung haben drei Polstellen. Für unsere Untersuchungen wählen wir je eine komplexe und eine reelle Polstelle. Das charakteristische Polynom lautet deshalb:

$$P(\lambda)=(p_1\quad\lambda)\,(p_{2/3}\quad\lambda)=(p_1\quad\lambda)\,((a\quad\lambda)^2\quad w^2)\quad \text{mit}\quad p_{2/3}=a\pm jw$$

p_1: reelle Polstelle

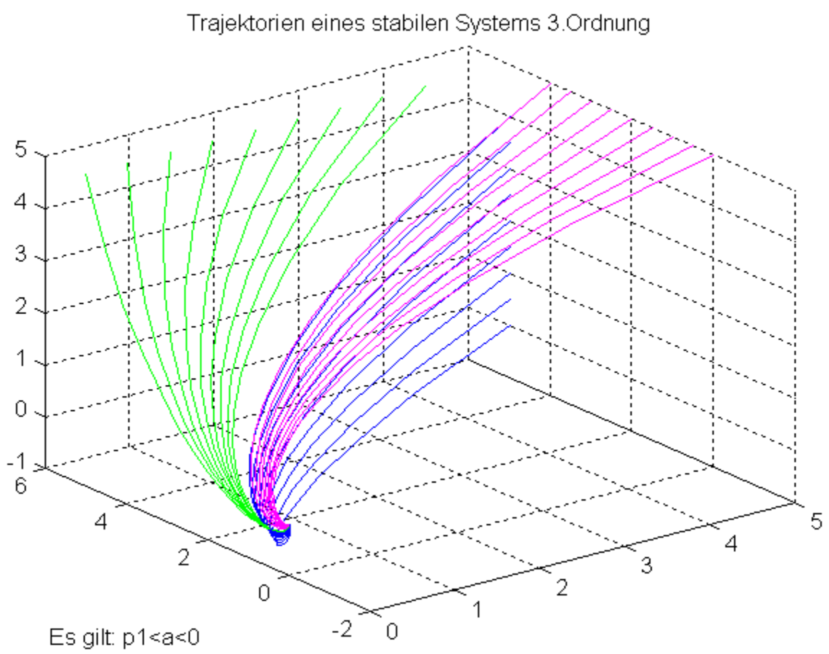
$p_{2/3}$: konjugiert-komplexe Polstelle

Die Systemmatrix A lautet deshalb:

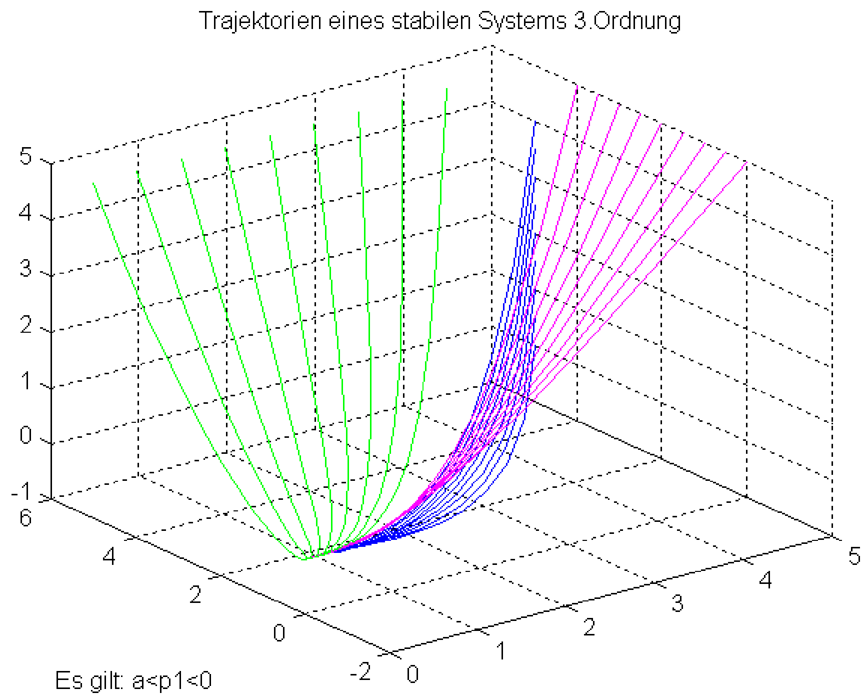
$$A=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & w \\ 0 & w & a \end{bmatrix}$$

Daraus ergeben sich folgende Fälle:

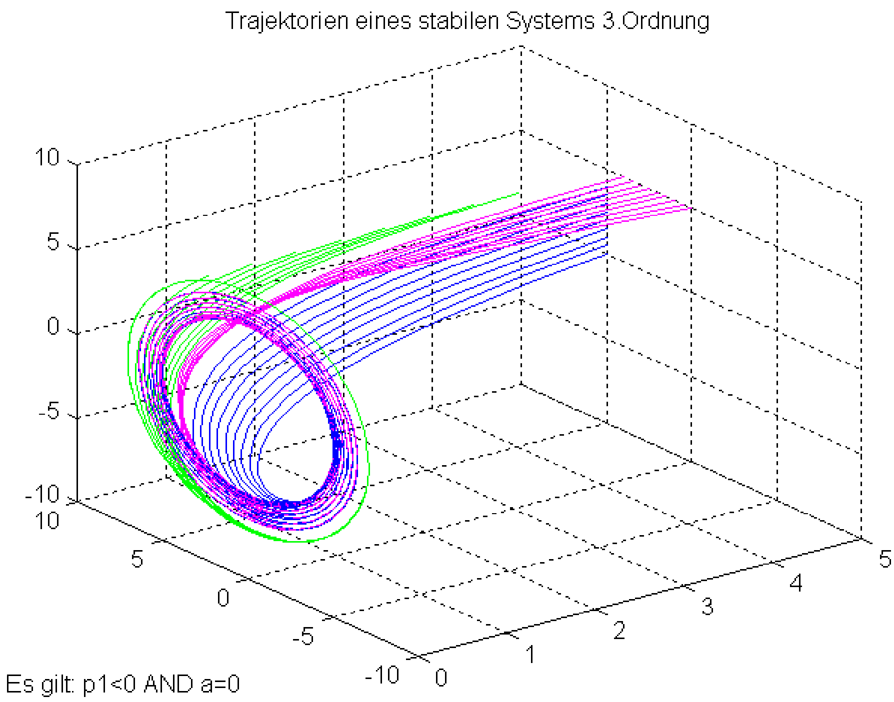
Fall 1: $p_1<a<0$



Fall 2: $a<p_1<0$



Fall 3: $a=0 \quad p_1<0$



Das m-File lautet hier:

```
% Trajektorien im Raum
% Laborübung 5
% von Stephan Senn
loop=1;
while loop
  hold off

k = menu('Alle Systeme sind stabil und von der Ordnung 3. Wählen sie ein System:','Bedingung: p1<a<0','Bedingung: a<p1<0','Bedingung: p1<0 AND a=0','Beenden')
clf
switch k

case 1
p1=-4;
a=-2;
w=1;

A=[p1 0 0
    0 a w
    0 -w a];

B=[0 0 0]';
C=eye(3);
D=0;
sys1 = ss( A,B,C,D);

for i=0:0.5:4
x0=[i;5;5];
[xx]=initial(sys1,x0,10);
plot3(xx(:,1),xx(:,2),xx(:,3),'g');
hold on
end

for j=0:0.5:4
x0=[5;j;5];
[xx]=initial(sys1,x0,10);
plot3(xx(:,1),xx(:,2),xx(:,3),'m');
hold on
end

for k=0:0.5:4
```

```
x0=[5;5;k];
[xx]=initial(sys1,x0,10);
plot3(xx(:,1),xx(:,2),xx(:,3),'b');
end

grid on
title('Trajektorien eines stabilen Systems 3.Ordnung');
ylabel('Es gilt: p1<a<0');
```

Bei Systemen höherer Ordnung ist eine grafische Darstellung der Trajektorien nicht möglich.