Laplacetransformation (Laborübung 3)

Aufgabe 3.1

Physikalische Systeme werden oft mit Hilfe von Differentialgleichungen dargestellt. Oft kann man aber diese Gleichungen nur mit grossem Aufwand auflösen. Um das Auflösen der Gleichungen zu vereinfachen kann man die Laplace Transformation verwenden.

Die Laplacetransformation ist eine spezielle Fouriertransformation, bei der nur der positive Bereich verwendet wird. Sie ist wie folgendermassen definiert:

$$\mathcal{L}(f(t))=F(s)=\int_0^\infty f(t)\; e^{\;s\,t}\,dt \qquad s \qquad ,t$$

Für die zweite Ableitung von f"(t) folgt nach partieller Integration:

$$\mathcal{L}(f''(t))=\int_0^\infty f''(t)\; e^{\;s\,t}\,dt=f'(t)\; e^{\;s\,t}\big|_{0\ldots\infty}\quad s\int_0^\infty f'(t)\; e^{\;s\,t}\,dt=\quad f'(\quad 0)\quad s\;(f(\quad 0)\quad s\;F(s))$$

(L1) $\mathcal{L}(f''(t))=s^2\;F(s)\quad f'(\quad 0)\quad s\;f(\quad 0)$

Analog folgt für die erste Ableitung f'(t):

(L2) $\mathcal{L}(f'(t))=s\;F(s)\quad f(\quad 0)$

Bei der Übung 2 hatten wir folgende zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

(A) $m_1\;x_1=\quad b_1\;(x_1\quad x_2)\quad K_1\;(x_1\quad x_2)\quad u$

(B) $m_2\;x_2=b_1\;(x_1\quad x_2)\quad K_1\;(x_1\quad x_2)\quad b_2\;(w\quad x_2)\quad K_2\;(w\quad x_2)\quad u$

Wir laplacieren nun die beiden DGLn unter der Annahme, dass alle Anfangsbedingungen null sind. Es soll also gelten:

$$x_1(\quad 0)=0\quad ,\quad x_2(\quad 0)=0\quad ,\quad w(\quad 0)=0\quad ,\quad u(\quad 0)=0$$

Wir erhalten mit Hilfe von (L1) und (L2):

(AL) $m_1\;s^2\;X_1(s)=\quad b_1\;s\;(X_1(s)\quad X_2(s))\quad K_1\;(X_1(s)\quad X_2(s))\quad U(s)$

(BL) $m_2\;s^2\;X_2(s)=b_1\;s\;(X_1(s)\quad X_2(s))\quad K_1\;(X_1(s)\quad X_2(s))\quad \ldots$

$\ldots\quad b_2\;s\;(W(s)\quad X_2(s))\quad K_2\;(W(s)\quad X_2(s))\quad U(s)$

Wir wissen, dass die DGLn einer allgemeinen Matrixform entsprechen:

(C) $x=A\;x\quad B\;c$

Wenn wir nun diese Matrixgleichung (C) laplacieren, so erhalten wir unter der Annahme, dass die Anfangsbedingungen null sind:

(D) $(s\;I_n\quad A)\;X(s)=B\;C(s)$

Mit der Substitution $G=s\;I_n\quad A$ ergibt sich:

(E) $G\;X(s)=B\;C(s)$

Wir lösen nun (E) nach X(s) auf und erhalten:

(F) $X(s)=G^{\;1}\;B\;C(s)$

Dabei bezeichnet G^{-1} die inverse Matrix G.

Unser Ziel ist es nun, die laplacierten Gleichungen (AL) und (BL) in die Form (E) zu bringen. Damit können wir die Matrizen G und B bestimmen. Anschliessend müssen wir nur noch die inverse Matrix G berechnen und eine Matrizenmultiplikation ausführen. Wir erhalten also:

$$\begin{pmatrix} m_1 s^2 \quad b_1 s \quad K_1 & (b_1 s \quad K_1) \\ (b_1 s \quad K_1) & m_2 s^2 \quad b_1 s \quad K_1 \quad b_2 s \quad K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b_2 s \quad K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(s) \\ W(s) \end{pmatrix}$$

Wir müssen nun die Inverse der Matrix G berechnen. Die Inverse einer 2x2-Matrix A berechnet sich wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^{\ 1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für die inverse Matrix G^{-1}:

$$\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{det(G)} \begin{pmatrix} m_2 s^2 \quad b_1 s \quad K_1 \quad b_2 s \quad K_2 & b_1 s \quad K_1 \\ b_1 s \quad K_1 & m_1 s^2 \quad b_1 s \quad K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b_2 s \quad K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(s) \\ W(s) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{det(G)} \begin{pmatrix} m_2 s^2 \quad b_2 s \quad K_2 & (b_1 s \quad K_1)(b_2 s \quad K_2) \\ m_1 s^2 & (m_1 s^2 \quad b_1 s \quad K_1)(b_2 s \quad K_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(s) \\ W(s) \end{pmatrix}$$

Nun wollen wir das Übertragungsverhalten im Laplacebereich betrachten. Dazu benötigen wir eine Übertragungsfunktion. Jede Übertragungsfunktion beschreibt folgende Beziehung:

$$q(t) = \frac{output(t)}{input(t)} \quad Q(s) = \frac{Output(s)}{Input(s)}$$

Zeitbereich *Laplacebereich*

Wir betrachten im folgenden zwei Übertragungsfunktionen:[1]

$$q_1(t) = \frac{x_1 \quad x_2}{u(t)} \quad \text{mit} \quad w(t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$q_2(t) = \frac{x_1 \quad x_2}{w(t)} \quad \text{mit} \quad u(t) = 0, \quad t \geq 0$$

Im Laplacebereich erhalten wir dann:

$$Q_1(s) = \frac{X_1 \quad X_2}{U(s)} \quad \text{mit} \quad W(s) = 0, \quad s > 0$$

$$Q_2(s) = \frac{X_1 \quad X_2}{W(s)} \quad \text{mit} \quad U(s) = 0, \quad s > 0$$

Damit erhalten wir folgende Übertragungsfunktionen:

$$Q_1(s) = \frac{(m_1 \quad m_2) s^2 \quad b_2 s \quad K_2}{det(G)}$$

$$Q_2(s) = \frac{m_1 b_2 s^3 \quad m_1 K_2 s^2}{det(G)}$$

1 Es handelt sich hier um eine Superposition der Quellen. Es wird das Verhalten des Systems bei Anregung von nur einer Quelle betrachtet. Die restlichen Quellen werden auf null gesetzt.

Nun lässt sich das System im Laplacebereich modellieren. Da die Laplacetransformation nur eine spezielle Fouriertransformation ist ($s=j\omega$), entspricht der Laplacebereich dem Frequenzbereich mit der Bedingung, dass $t \geq 0$ ist. Wir können nun die Amplitude X_1-X_2 für jede Frequenz s betrachten. Daneben bietet Matlab auch eine Simulation im Zeitbereich an. Dies bedingt eine Rücktransformation in den Zeitbereich.

Aufgabe 3.2

In dieser Aufgabe soll der Einfluss der Lage der Pole sowie der Nullstellen auf das Zeitverhalten eines Systems zweiter und dritter Ordnung untersuchet werden.

Mit dem Befehl tf(num,den) kann eine Transferfunktion (auch Übertragungsfunktion genannt) in Matlab definiert werden. Dabei bezeichnet num die Koeffizienten von s im Zähler und den die Koeffizienten von s im Nenner. Dies veranschaulicht das folgende Beispiel:

$$Q(s)=\frac{s\quad 1}{s^2\quad 3s\quad 5}$$

```
num=[1 1];
den=[1 3 5];
```

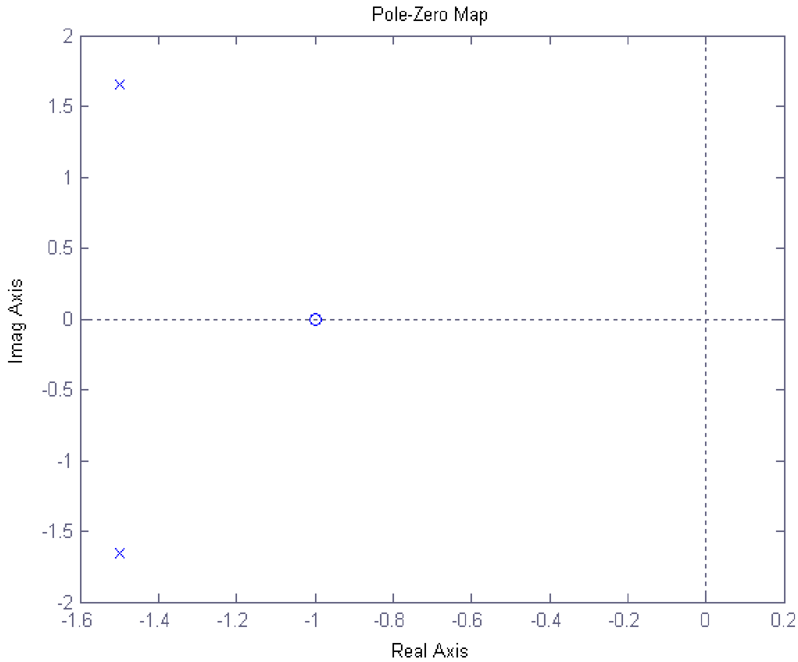
Da die Transferfunktion eine Input-Output-Beziehung beschreibt, wird damit das System eindeutig beschrieben und kann als Systemobjekt in Matlab verwendet werden. Unser m-File sieht dann wie folgt aus:

```
num=[1 1];
den=[1 3 5];
sys=tf(num,den);
```

Mit dem Befehl roots(sys) können die Polstellen (Nullstellen des Nenners) bestimmt werden. Der Befehl pzmap(sys) bestimmt die Polstellen sowie die Nullstellen der Transferfunktion. Dies zeigt das folgende Beispiel:

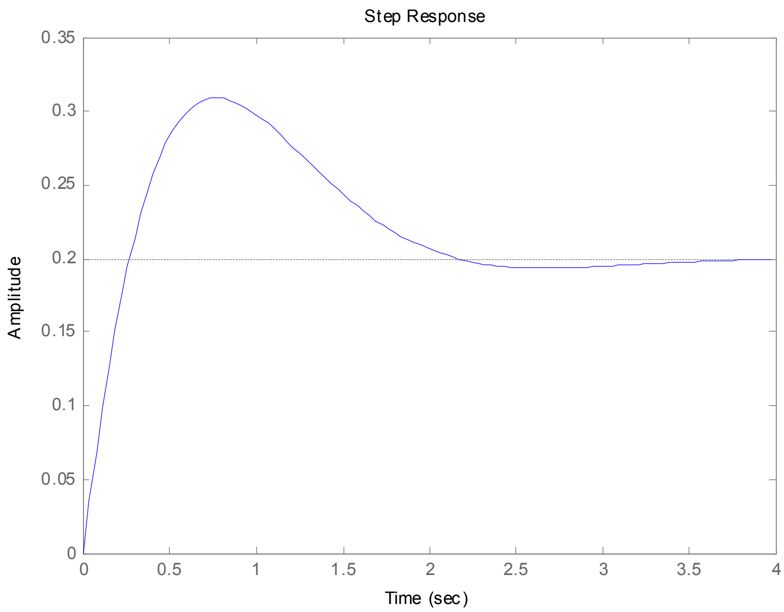
```
roots(sys)
ans =
  -1.5000 + 1.6583i
  -1.5000 – 1.6583i
pzmap(sys)
```

Mit Hilfe der Polstellen wird die Stabilität eines Systems untersucht. Falls die Polstellen in der linken Halbebene liegen, so ist das System stabil. Im umgekehrten Fall, falls sie in der rechten Halbebene liegen, ist das System instabil (z.B. Oszillation, Kippverhalten).

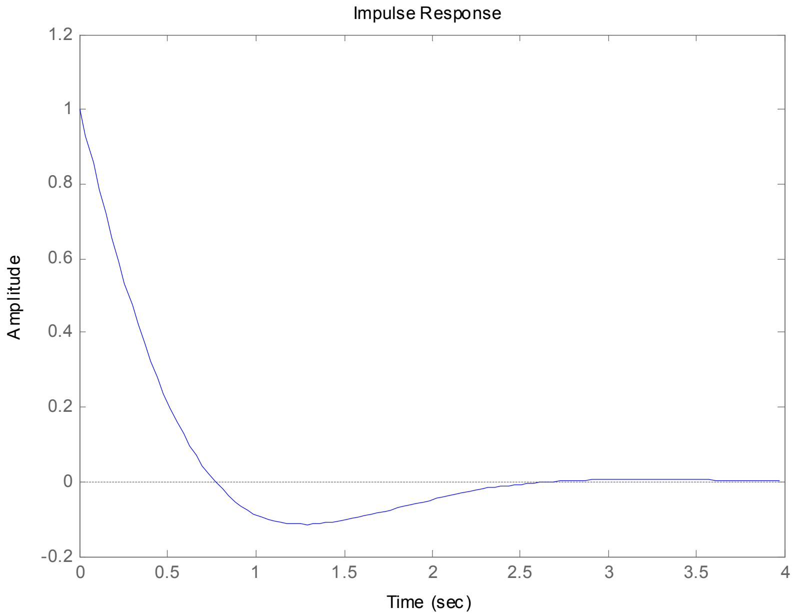


Die Befehle step(sys) und impuls(sys) sind hier ebenfalls möglich. (Matlab muss die Transferfunktion in den Zeitbereich tranfsformieren, was unter Umständen Zeit in Anspruch nimmt.)

step(sys)



impuls(sys)



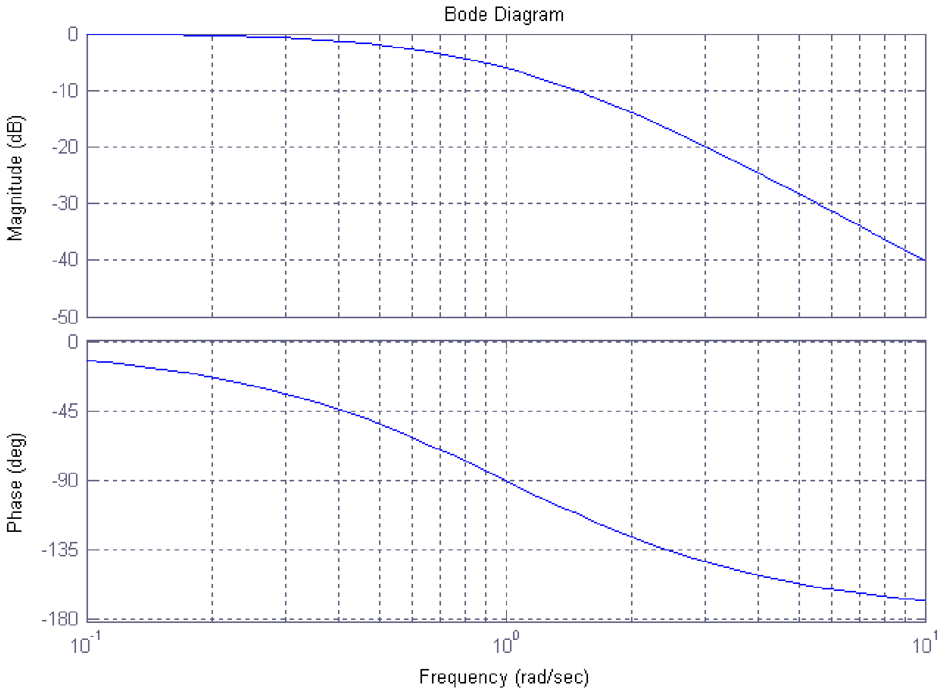
Es folgen nun einige Beispiele von Transferfunktionen.

Tiefpassfilter 2.Ordnung

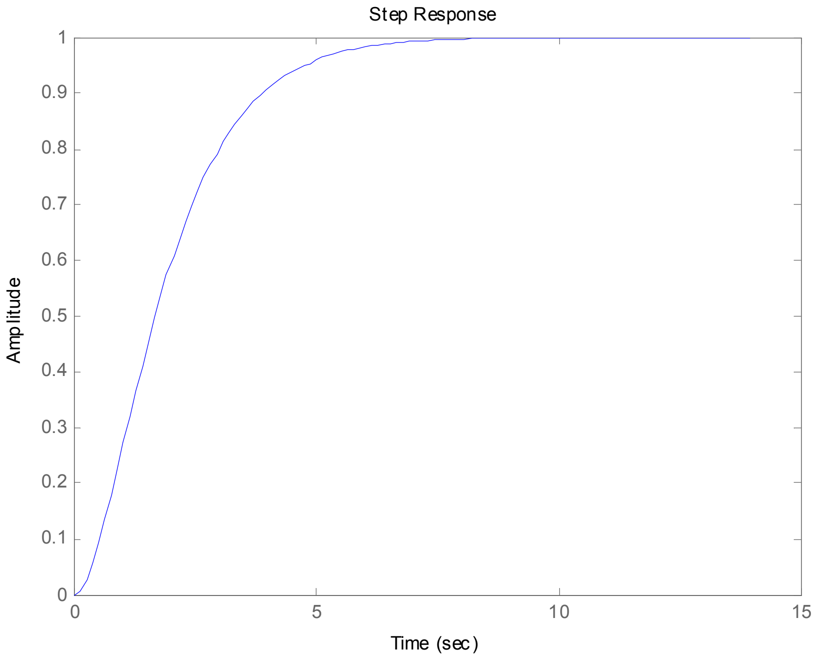
$$Q(s)=\frac{1}{s^2\quad 2s\quad 1}$$

num=[1]
den=[1 2 1]

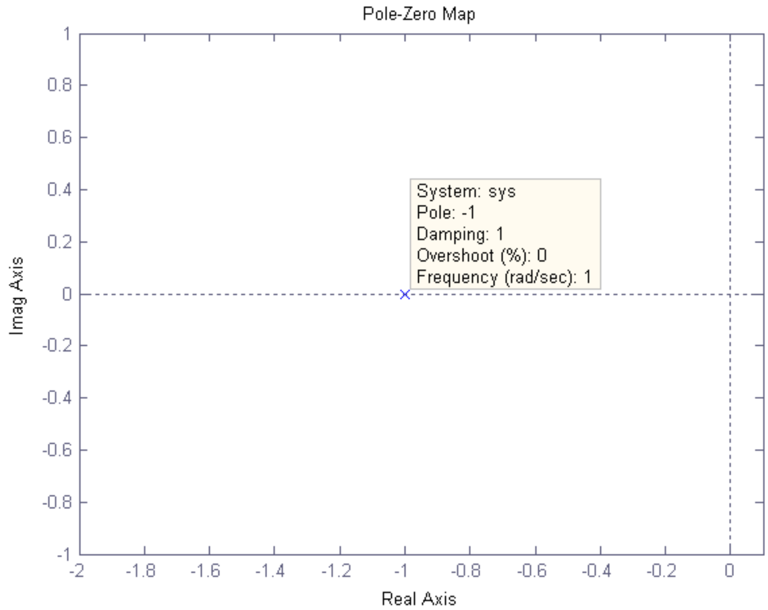
Wir bestimmen zuerst mit dem Befehl ltiview(sys) den Bodeplot. Wir erhalten:



Die Schrittantwort ergibt uns folgende charakteristische Kurve:



Nun betrachten wir noch die Polstellen:



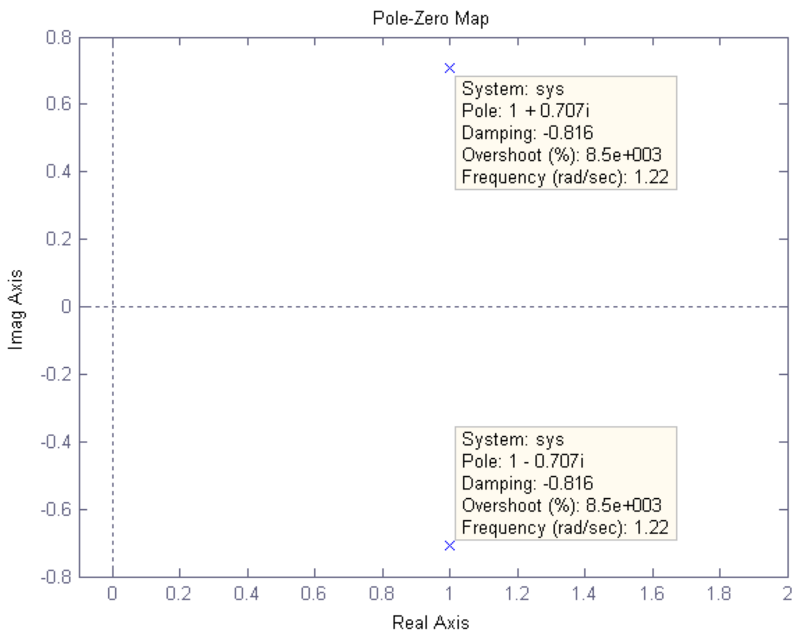
Es handelt sich hier um einen doppelte Polstelle.

<u>Instabiler Tiefpassfilter 2.Ordnung</u>

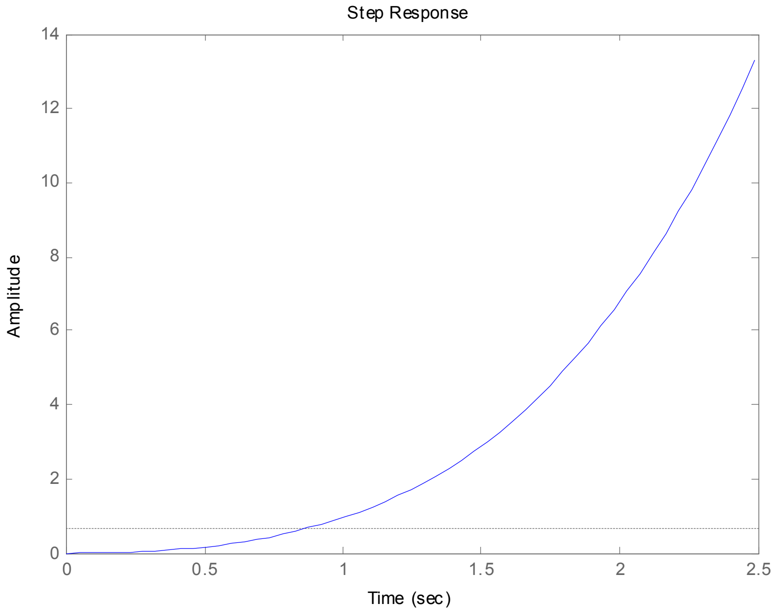
$$Q(s)=\frac{1}{s^2 \quad 2s \quad 1.5}$$

num=[1]
den=[1 -2 1.5]

Polstellen liegen nun in der linken Halbebene, wie die nächste Abbildung zeigt!

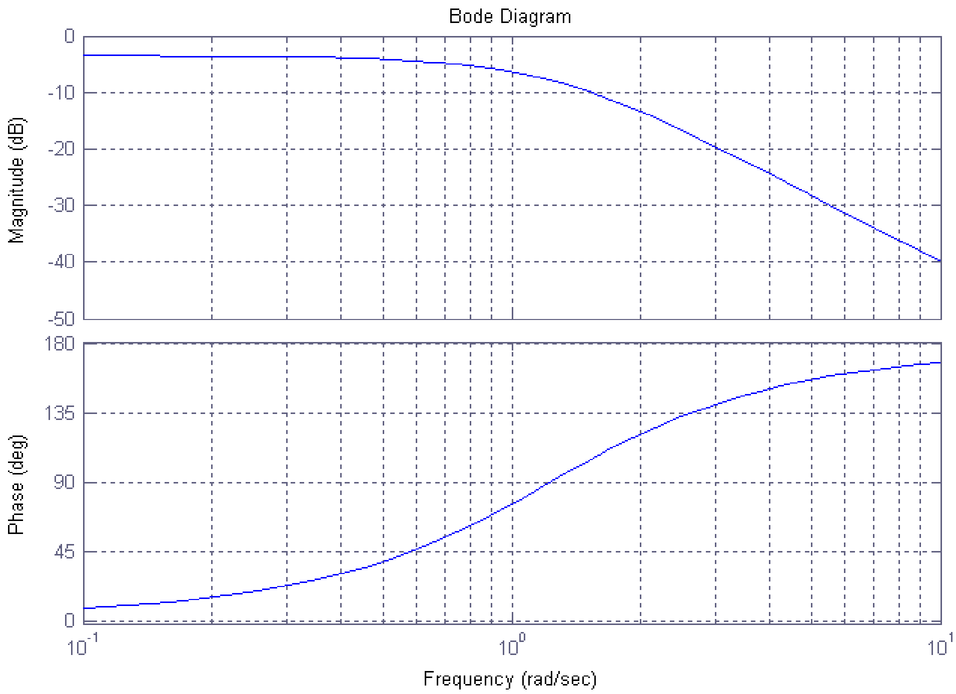


Die Schrittantwort ergibt unter diesen Umständen:



Die Transferfunktion konvergiert nun nicht mehr gegen null, sondern divergiert gegen unendlich wenn $t \geq 0$ ist.

Der Bodeplot lautet:



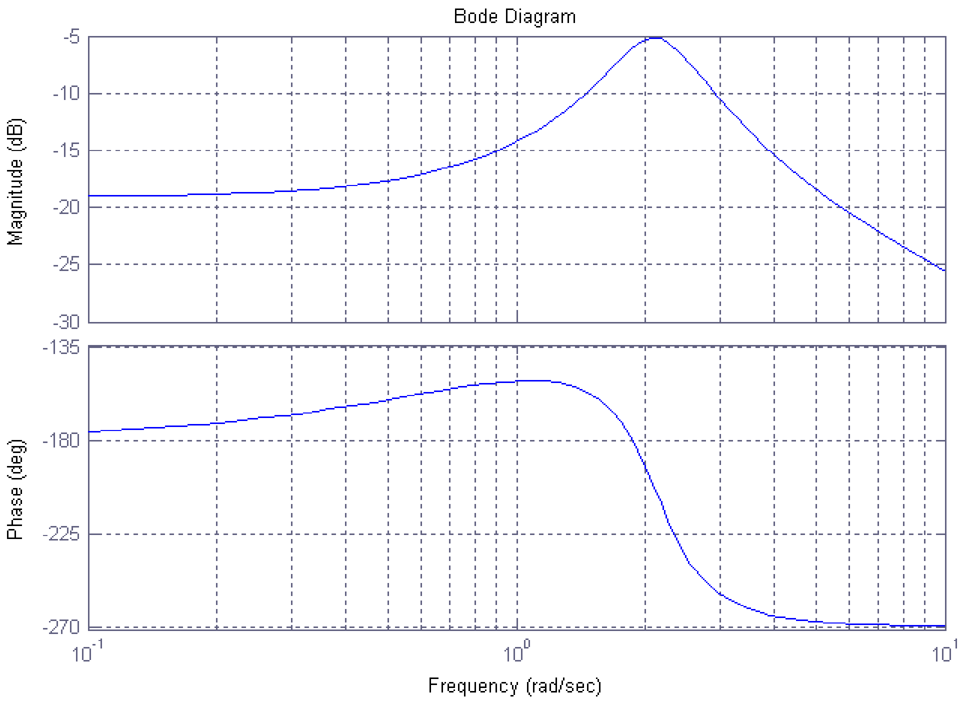
Man beachte die Drehung der Phasenlage von 0 auf +180°.

Breitbandfilter

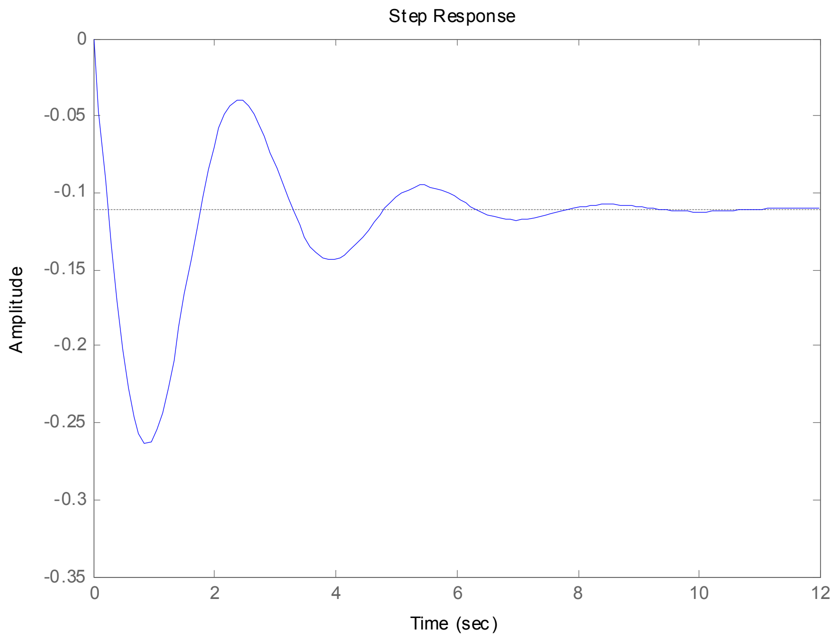
$$Q(s)=\frac{s\quad 1}{2s^2\quad 2s\quad 9}$$

num=[1 1]
den=[-2 -2 -9]

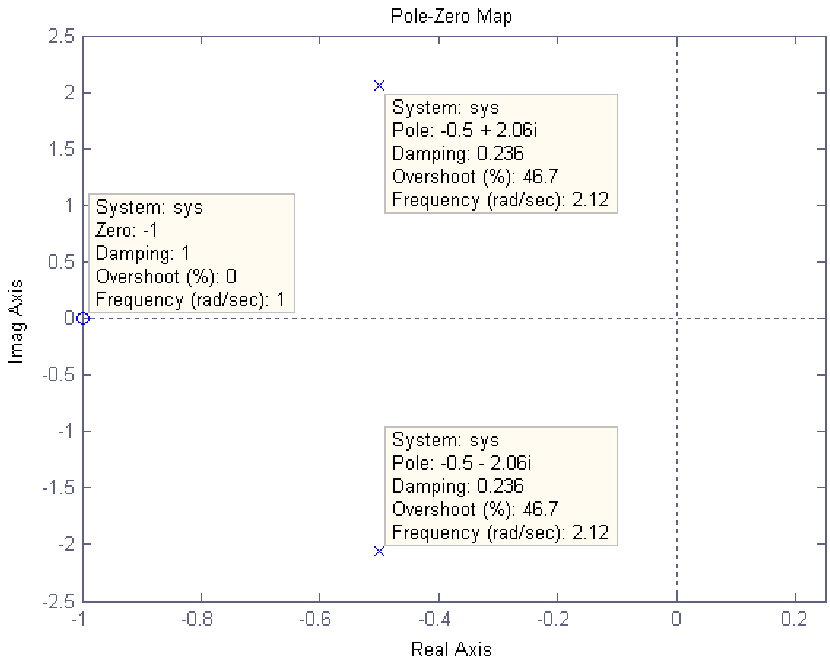
Zuerst erstellen wir den Bodeplot:



Die Schrittantwort ergibt:



Die Polstellen und die Nullstellen lauten:



Das verwendete m-File lautet:

```
num =[1 1];            %Zähler Polynom
den =[-2 -2 -9];       %Nenner Polynom
sys =tf(num,den);      %Definition des Systems sys

%Jeweils eine dieser Funktionen aussuchen:

%roots(den)            %Pollagen
%pzmap(sys)            %Pole Zero Map
%step(sys)             %Schrittantwort
%impulse(sys)          %Impulsantwort
ltiview(sys)           %System betrachten: Bodeplot, Impulsantwort, usw.
```

Aufgabe 3.3

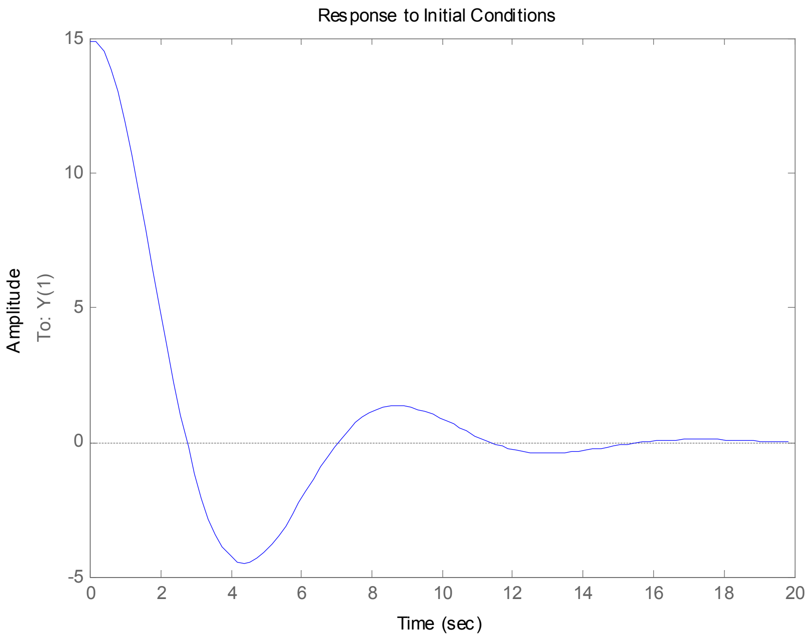
Unser m-File lautet:

```
a = [-0.5572 -0.7814;0.7814 0];

b = [1 -1;0 2];

c = [1.9691 6.4493];

d=  0;

sys = ss(a,b,c,d);

%Wähle eine Funktion aus:

%initial(sys,[1;2])

tf(sys)
```

Mit dem Befehl tf(sys) können wir auch die Transferfunktion eines bestehenden Systems ausgeben. Die Transferfunktion dieses Systems, die Input/Output-Relation, lautet:

```
Transfer function from input 1 to output:
   1.969 s + 5.039
-----------------------
s^2 + 0.5572 s + 0.6106


Transfer function from input 2 to output:
  10.93 s - 0.9297
-----------------------
s^2 + 0.5572 s + 0.6106
```

Die Simulation aus dem Anfangszustand [1;2] ergibt mit dem Befehl initial(sys,[1;2]):

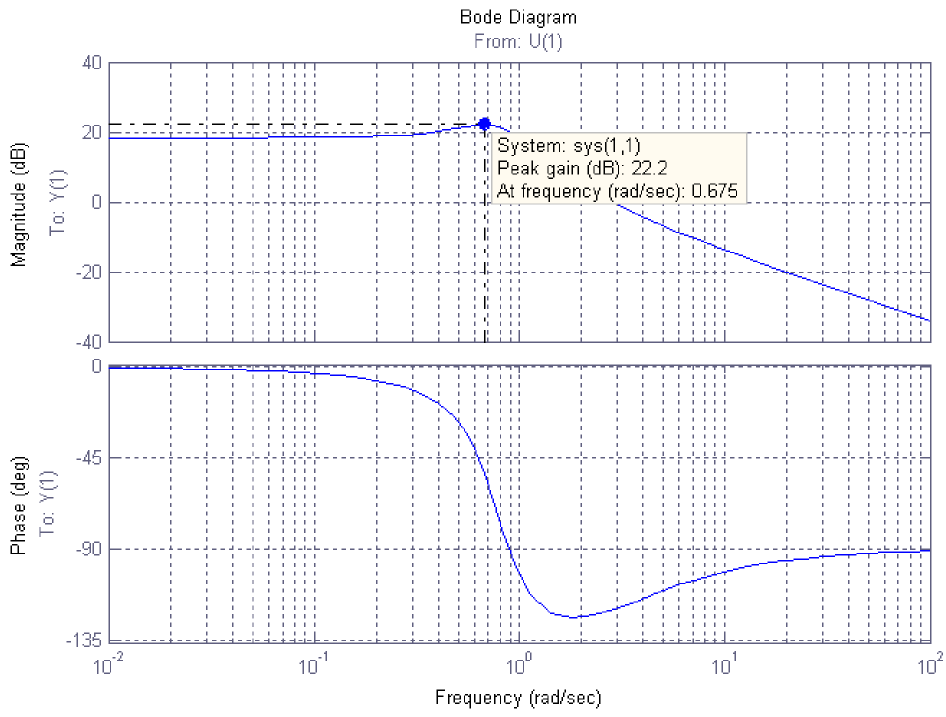


Dies ist die freie Antwort des Systems aus dem Zustand [1;2].

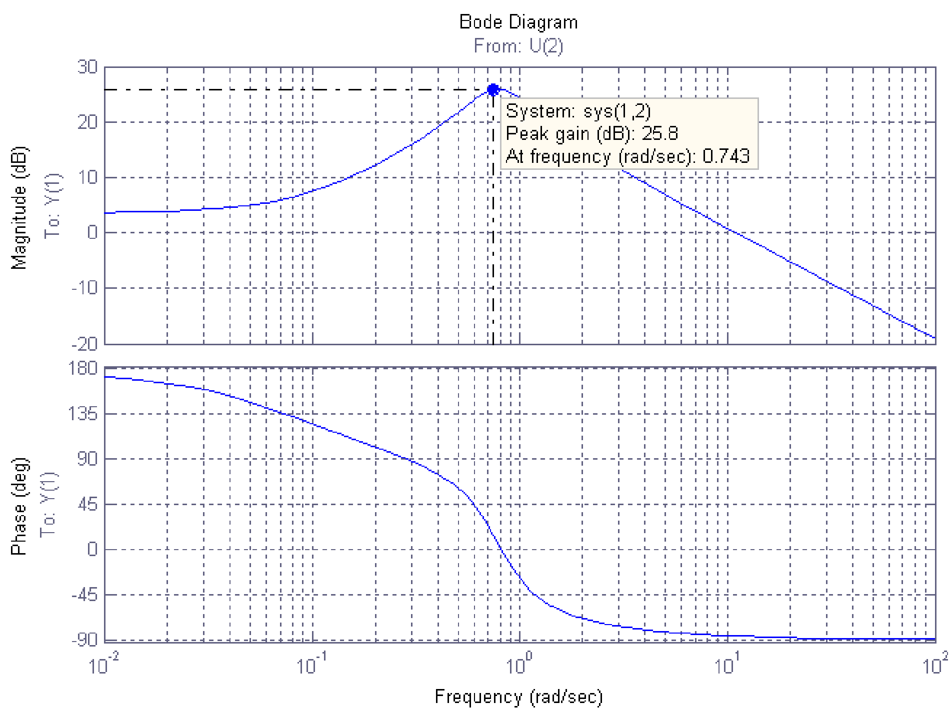
Nun stellt sich die Frage, was passieren würde, wenn $d \neq 0$ ist. Zuerst halten wir uns vor Augen, was dieser Fall bedeuten würde. Wenn $d \neq 0$ ist, dann ist die Ausgangsfunktion abhängig vom Eingang bzw. den Eingangsfunktionen. Wo könnte ein solcher Fall in der Praxis auftreten? - Bleiben wir bei unserem Beispiel mit der Radaufhängung und dem Bus. Wir möchten den Abstand der Radaufhängung zum Boden zu jedem Zeitpunkt t bestimmen. Die Ausgangsfunktion $y = x_2 \quad u$ beschreibt den Abstand des Bodens zur Radaufhängung. Wir sehen nun, dass diese Ausgangsfunktion vom Eingang u abhängig ist.

Wir bestimmen nun den Bodeplot der beiden Transferfunktionen. Wir erhalten:

Transferfunktion 1: *input 1 to output*



Transferfunktion 2: *input 2 to output*



Die Resonanzfrequenzen lauten also:

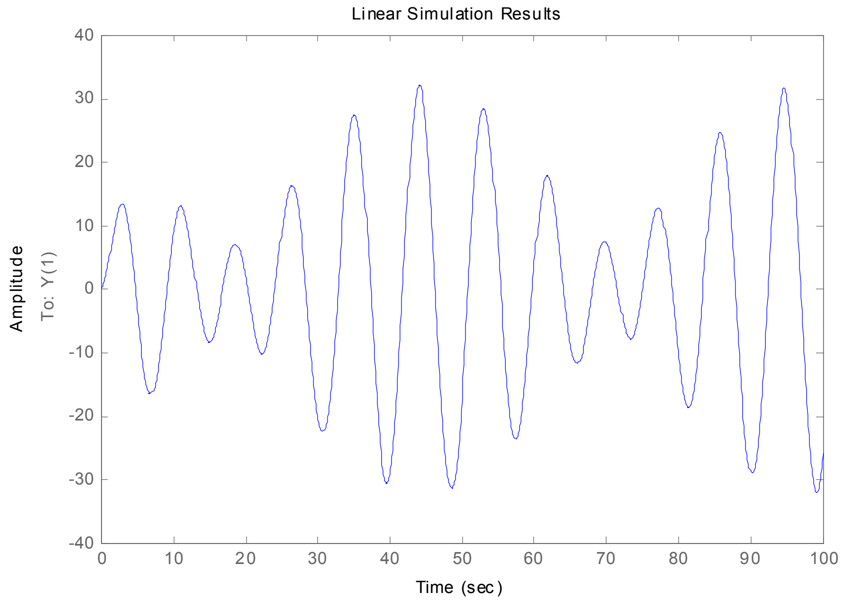
Transferfunktion 1: ω=0.675rad/s

Transferfunktion 2: ω=0.743rad/s

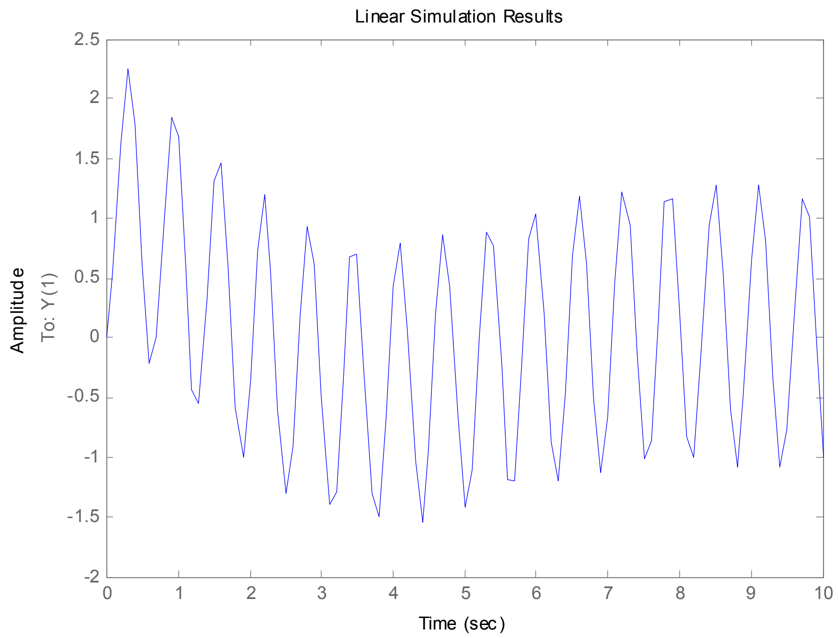
Wir regen nun das System mit genau diesen beiden Frequenzen an. Wir ändern das m-File wie folgt ab:

```
f1=0.625;
f2=0.743;
t= 0:0.1:100;
u= [sin(f1*t);sin(f2*t)];
lsim(sys,u,t)
```

Das Resultat ist weiter nicht verwunderlich. Wir erhalten einen Aufschaukelungsprozess:



Im Vergleich dazu nehmen wir eine Anregung mit Nicht-Resonanzfrequenzen. Wir nehmen für beide Eingänge eine sinusförmige Anregung mit der Frequenz f=10rad/s. Wir erhalten:



Um die Diagramme zu beschriften, sind folgende Befehle in Matlab vorhanden:

title('text'): Titel einfügen

xlabel('text'): x-Achsenbeschriftung einfügen

ylabel('text'): y-Achenbeschriftung einfügen

legend('first fn','second fn', ...): Legende hinzufügen

...und viele mehr. (siehe Matlab: help plot)

Hier ein kleines Beispiel:

```
a = [-0.5572 -0.7814;0.7814 0];
b = [1 -1;0 2];
c = [1.9691 6.4493];
d=  0;
sys = ss(a,b,c,d);
f=10;
t= 0:0.1:10;
u= [sin(f*t);sin(f*t)];
lsim(sys,u,t)
xlabel('Zeit in [s]');
ylabel('Auslenkung in [cm]');
title('Simulation 3');
legend('Verlauf der Auslenkung');
```