Simulation einer Radaufhängung (Laborübung 2)

In dieser Uebung soll das Verhalten einer Radaufhängung eines Busses untersucht werden. Auf folgende Fragen soll eine Antwort gefunden werden:

Wie verhält sich die Aufhängung auf einer unebenen Strasse (z.B. mit Schlaglöchern, Verwerfungen, usw.) und was für Auswirkungen hat dies auf das Fahrzeug? Kommt es zur Resonanzkatastrophe oder wird es den Passagieren schlecht? Wie könnte man dieses Verhalten verbessern? Wo liegen die Probleme?

Um diese Fragen beantworten zu können, benötigen wir zuerst eine Modellierung der Wirklichkeit. Abbildung 1 zeigt eine Radaufhängung in der Wirklichkeit. Abbildung 2 stellt unser Modell dar.

Abbildung 1 Radaufhängung

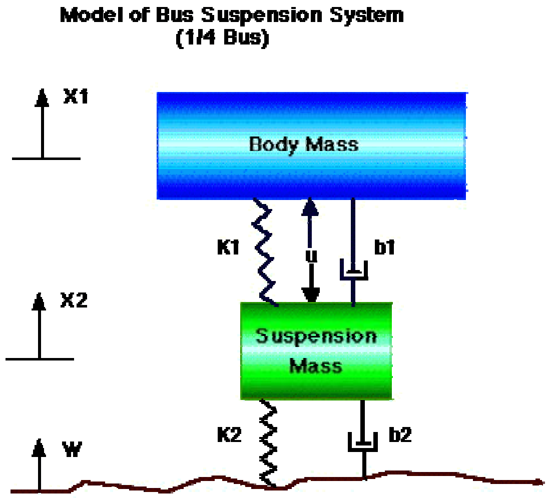


Abbildung 2 Modell der Radaufhängung

Folgende Daten sind bekannt:

Masse des Wagenoberteils (Body Mass): m_1=2500kg

Masse der Radaufhängung (Suspension Mass): m_2=320kg

Federkonstanten: K_1=80kN/m und K_2=500kN/m

Dämpfungskonstanten: b_1=350Ns/m und b_2=15020Ns/m

Koordinaten der Massen m_1 und m_2: x_1 und x_2

Koordinaten der Bodenänderung: w(t)

Auslenkung der Steuereinheit zur Maximierung der Dämpfung (Kontrolleinheit): u(t)

Wir stellen nun die Differentialgleichungen des Modells auf, um die Bewegung dieses Systems zu beschreiben.

(A) $m_1 \, x_1 = \quad b_1 \, (x_1 \quad x_2) \quad K_1 \, (x_1 \quad x_2) \quad u$

(B) $m_2 \, x_2 = b_1 \, (x_1 \quad x_2) \quad K_1 \, (x_1 \quad x_2) \quad b_2 \, (w \quad x_2) \quad K_2 \, (w \quad x_2) \quad u$

Wir reduzieren das DGL-System 2.Ordnung auf ein System 1.Ordnung. Das DGL-System soll also in folgende Matrizenform gebracht werden:

$x = A \; x \quad B \; c$

Dabei bedeutet die Matrix x die inneren Zustände. Die Matrix c bezeichnet die Quellen. Die Matrizen A und B enthalten die Koeffizienten.

Wir substituieren die beiden DGLn mit

(i) $p = x_1 \quad x_2$.

Damit erhalten wir:

(A) $x_1 = \frac{b_1}{m_1} p \quad \frac{K_1}{m_1} p \quad \frac{u}{m_1}$

(B) $x_2 = \frac{b_1}{m_2} p \quad \frac{K_1}{m_2} p \quad \frac{b_2}{m_2}(w \quad x_2) \quad \frac{K_2}{m_2}(w \quad x_2) \quad \frac{u}{m_2}$

Wir subtrahieren nun A von B und erhalten:

(C) $x_1 \quad x_2 = p = \left(\frac{b_1}{m_1} \quad \frac{b_1}{m_2}\right) p \quad \left(\frac{K_1}{m_1} \quad \frac{K_1}{m_2}\right) p \quad \frac{b_2}{m_2}(w \quad x_2) \quad \frac{K_2}{m_2}(w \quad x_2) \quad \left(\frac{1}{m_1} \quad \frac{1}{m_2}\right) u$

Wir integrieren nun C und erhalten:

(D) $p = \left(\frac{b_1}{m_1} \quad \frac{b_1}{m_2}\right) p \quad \frac{b_2}{m_2}(w \quad x_2) \quad \int \left(\left(\frac{K_1}{m_1} \quad \frac{K_1}{m_2}\right) p \quad \frac{K_2}{m_2}(w \quad x_2) \quad \left(\frac{1}{m_1} \quad \frac{1}{m_2}\right) u \right) dt$

Wir definieren nun:

(E) $q = \left(\frac{K_1}{m_1} \quad \frac{K_1}{m_2}\right) p \quad \frac{K_2}{m_2}(w \quad x_2) \quad \left(\frac{1}{m_1} \quad \frac{1}{m_2}\right) u$

Zusammen mit E erhalten wir für D:

(F) $p = \left(\frac{b_1}{m_1} \quad \frac{b_1}{m_2}\right) p \quad \frac{b_2}{m_2}(w \quad x_2) \quad q$

Wir können nun die Substitution nach x_2 auflösen und in E und F einsetzen:

(Ei) $q = \left(\frac{K_1}{m_1} \quad \frac{K_1}{m_2}\right) p \quad \frac{K_2}{m_2}(w \quad x_1 \quad p) \quad \left(\frac{1}{m_1} \quad \frac{1}{m_2}\right) u$

(Fi) $p = \left(\frac{b_1}{m_1} \quad \frac{b_1}{m_2}\right) p \quad \frac{b_2}{m_2}(w \quad x_1 \quad p) \quad q$

Nun setzen wir Fi in A ein und erhalten:

(G) $x_1 = \frac{b_1}{m_1} \left(\left(\frac{b_1}{m_1} \quad \frac{b_1}{m_2}\right) p \quad \frac{b_2}{m_2}(w \quad x_1 \quad p) \quad q \right) \quad \frac{K_1}{m_1} p \quad \frac{u}{m_1}$

Die Differentialgleichungen G, Fi, E bilden nun ein Differentialgleichungssystem. Das DGL-System lautet:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{b_1\ b_2}{m_1\ m_2} & 0 & \frac{b_1}{m_1}\left(\frac{b_1}{m_1}\quad\frac{(b_1\quad b_2)}{m_2}\right)\ \frac{K_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{b_2}{m_2} & 0 & \frac{(b_1\quad b_2)}{m_2}\ \frac{b_1}{m_1} & 1 \\ \frac{K_2}{m_2} & 0 & \frac{(K_1\quad K_2)}{m_2}\ \frac{K_1}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ p \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{b_1\ b_2}{m_1\ m_2} \\ 0 & \frac{b_2}{m_2} \\ \frac{1}{m_1}\ \frac{1}{m_2} & \frac{K_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

Wenn wir die Substitution $r = x_1$ anwenden würden, dann wird ersichtlich, dass es sich um ein DGL-Gesamtsystem 1.Ordnung handelt. Wir haben also die beiden gekoppelten Differentialgleichungen 2.Ordnung auf ein DGL-System 1.Ordnung reduziert. Dieses DGL-Gesamtsystem ist leichter zu handhaben und ermöglicht es zudem die differentielle Komponente von w zu eliminieren. Nun müssen wir noch eine Ausgangsfunktion von der folgenden Form generieren:

$$y = C\ x\quad D\ c$$

Die Matrizen C und D sind Koeffizientenmatrizen. Nun können wir verschiedene Ausgangsfunktion angeben, je nachdem für welches Teilsystem wir uns interessieren. Da wäre z.B.:

Bewegung der Radaufhängung: $y = x_2 = x_1 \quad p \qquad C = [1,0,\quad 1,0] \qquad D = 0$

Bewegung des Wagenoberteils: $y = x_1 \qquad C = [1,0,0,0] \qquad D = 0$

Relative Bewegung des Wagenob. zur Radaufh.: $y = x_1 \quad x_2 = p \qquad C = [0,0,1,0] \qquad D = 0$

Relative Bewegung des Bodens zur Radaufh.: $y = w \quad x_2 = w \quad (x_1 \quad p) = w \quad x_1 \quad p$
$C = [\quad 1,0,1,0] \qquad D = [0,1]$

u.a.

Wir simulieren nun das Modell mit Hilfe von Matlab. Dazu bilden wir zuerst ein System, bestehend aus den Koeffizientenmatrizen A,B,C und D. Der Syntax lautet:

```
sys=ss(A,B,C,D);
```

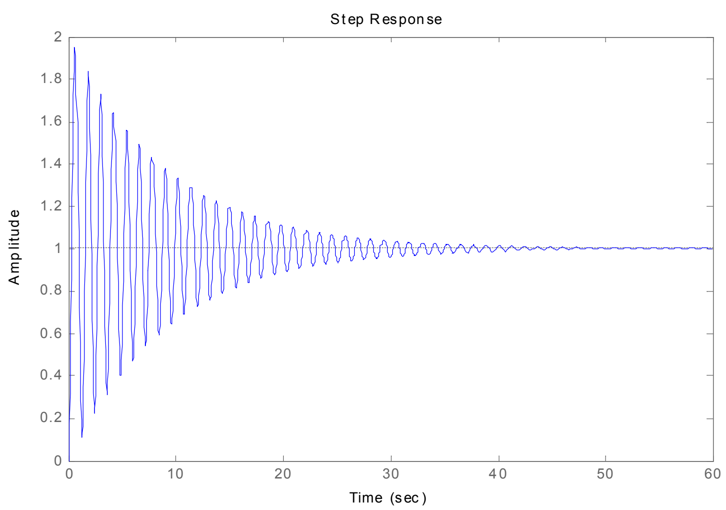
Wir nehmen nun im folgenden an, dass keine Dämpfungskontrolle im Wagen eingebaut ist (u=0). Daher lautet das DGL-Gesamtsystem:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{b_1\ b_2}{m_1\ m_2} & 0 & \frac{b_1}{m_1}\left(\frac{b_1}{m_1}\quad\frac{(b_1\quad b_2)}{m_2}\right)\ \frac{K_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{b_2}{m_2} & 0 & \frac{(b_1\quad b_2)}{m_2}\ \frac{b_1}{m_1} & 1 \\ \frac{K_2}{m_2} & 0 & \frac{(K_1\quad K_2)}{m_2}\ \frac{K_1}{m_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ p \\ q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_1\ b_2}{m_1\ m_2} \\ \frac{b_2}{m_2} \\ \frac{K_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

Wir wollen nun das Verhalten des Wagenoberteils, also die Auslenkung x_1 simulieren. Das m-File lautet daher:

```
% Konstanten
m1 = 2500;
m2 = 320;
k1 = 80000;
k2 = 500000;
b1 = 350;
b2 = 15020;
% Matrix A
A=[   0                   1     0                                              0
      -(b1*b2)/(m1*m2)    0     ((b1/m1)*((b1/m1)+(b1/m2)+(b2/m2)))-(k1/m1)    -(b1/m1)
      b2/m2               0     -((b1/m1)+(b1/m2)+(b2/m2))                     1
      k2/m2               0     -((k1/m1)+(k1/m2)+(k2/m2))                     0];
% Matrix B: B2 ist eine Teilmatrix von B1 für den Fall u=0
B1=[  0                   0
      1/m1                (b1*b2)/(m1*m2)
      0                   -(b2/m2)
      (1/m1)+(1/m2)       -(k2/m2)];

B2=[0  (b1*b2)/(m1*m2)    -(b2/m2)      -(k2/m2)]';
C=[1  0  0  0];
D=[0];
% System
sys = ss(A,B2,C,D);
% Simulationsbefehl
step(sys);
```

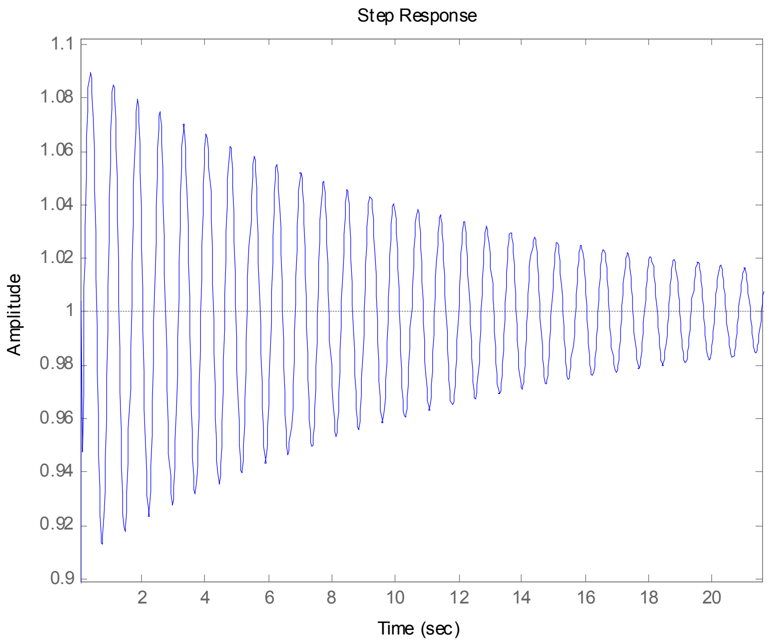
Wir erhalten folgendes Resultat:



Es handelt sich also um einen klassischen Abklingvorgang. Dies ist weiter auch nicht verwunderlich, denn wenn man beispielsweise an einem Wagen rüttelt, dann wird er angeregt und beginnt zu schwingen. Diese Schwingung klingt auf Grund der Dämpfung mit der Zeit ab. Das folgende M-File beschreibt das Verhalten der Radaufhängung. Wir ändern lediglich die Ausgangsfunktion:

```
C=[1   0   -1   0];
```

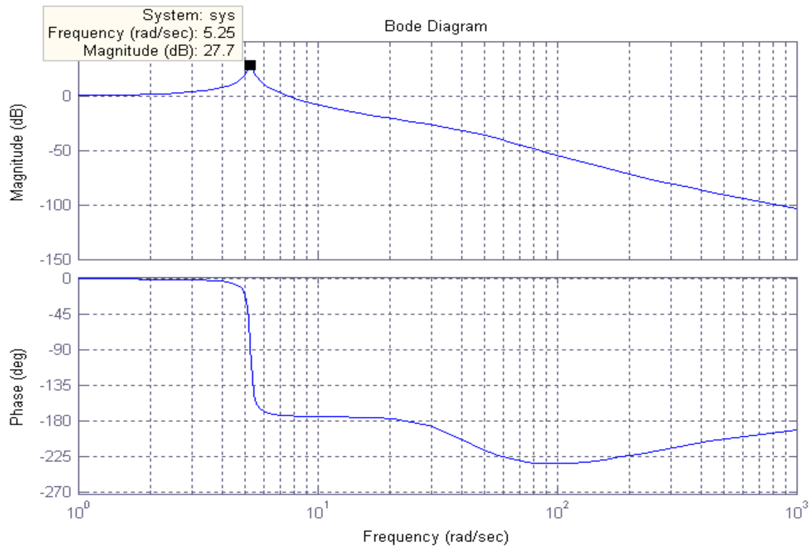
Wir erhalten folgendes Resultat



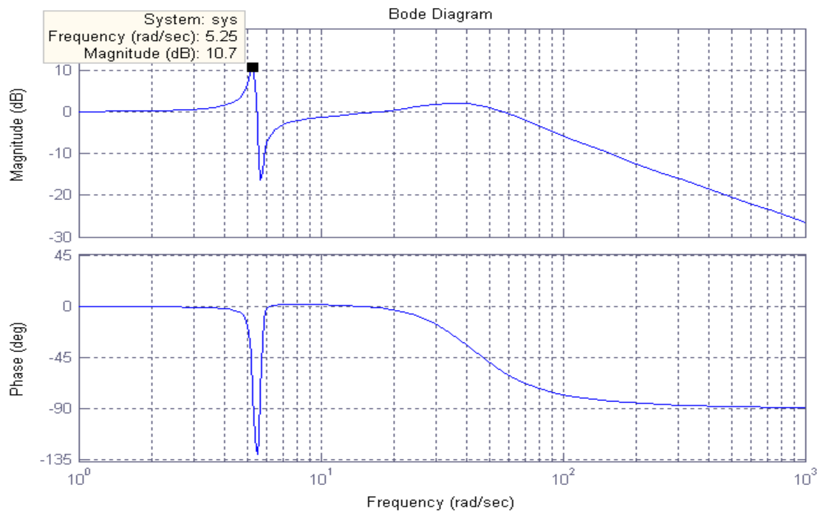
Der Abklingvorgang ist bei der Radaufhängung wohl nicht so sehr ausgeprägt. Wir interessieren uns nun für das Frequenzverhalten. Dazu fügen wir folgende Zeile in unser m-File ein:

```
ltiview(sys);
```

Wir erhalten für den Wagenoberteil folgenden Bodeplot:



Wir erkennen eine kritische Frequenz bei 5.25rad/s. Wird der Wagenoberteil bei dieser Frequenz angeregt, so entsteht Resonanz. Dies bedeutet für die Fahrgäste ein unangenehmes 'Aufschaukeln' des Busses. Diese Frequenz ist unbedingt zu vermeiden. Wir schauen uns nun das Frequenzverhalten der Radaufhängung an. Es zeigt folgendes Verhalten:

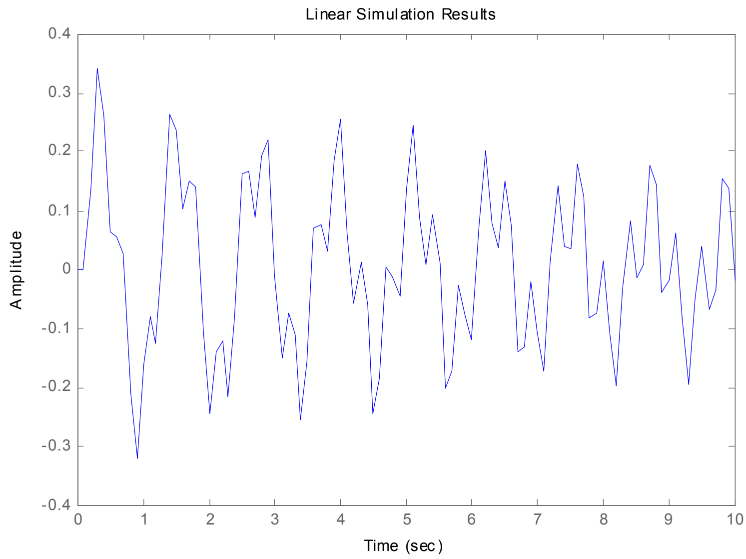


Die Radaufhängung zeigt dieselbe Resonanzfrequenz wie der Wagenoberteil. Allerdings ist die Amplitude wesentlich kleiner. Dies kann sich auf das Aufschaukeln, also den Resonanzfall, wesentlich auswirken. Eine höhere Amplitude bedeutet mehr Potential für den Aufschaukelungsvorgang. Im schlimmsten Fall kann es zur Resonanzkatastrophe kommen.

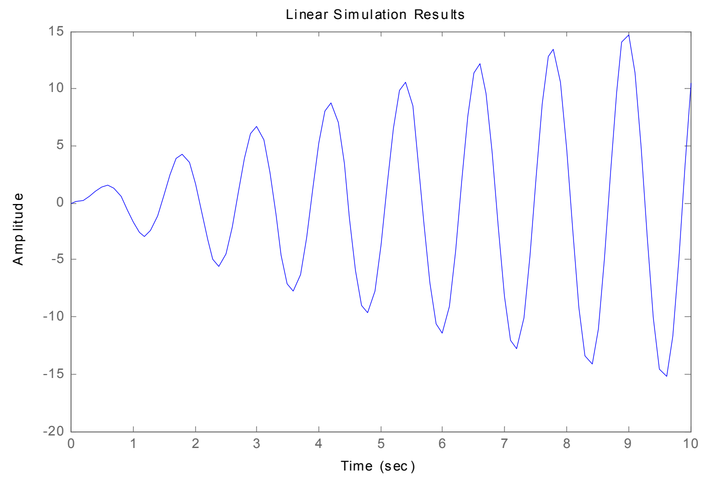
Wir nehmen nun an, dass der Bus über einen sinusförmigen Untergrund fährt ('Wellenblechfahren'). Dazu müssen wir die Funktion w(t) verändern. Sie soll nicht mehr eine Schrittantwort sein, sondern sinusförmig verlaufen. Daher fügen wir in unser m-File folgende Zeile ein:

```
f=80; % Frequenz in [rad/s]

t=0:0.1:10; % Simulation während 10s

w=sin(f*t);

lsim(sys,w,t);
```

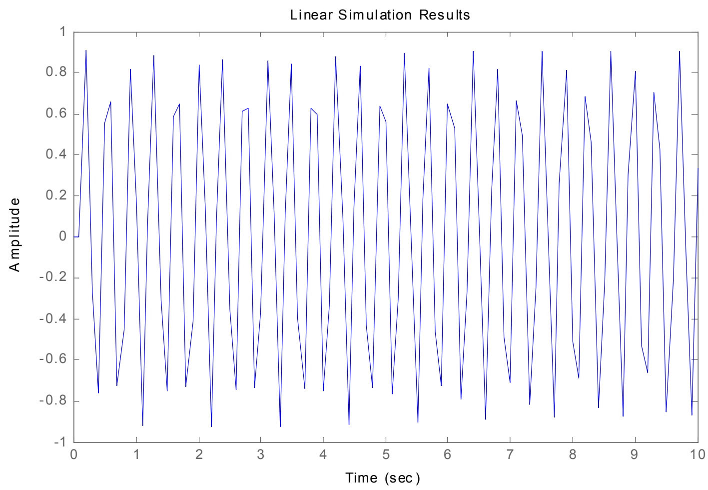
Bei 80rad/s tritt keine Resonanz auf. Dies veranschaulicht auch das Verhalten des Wagenoberteils:



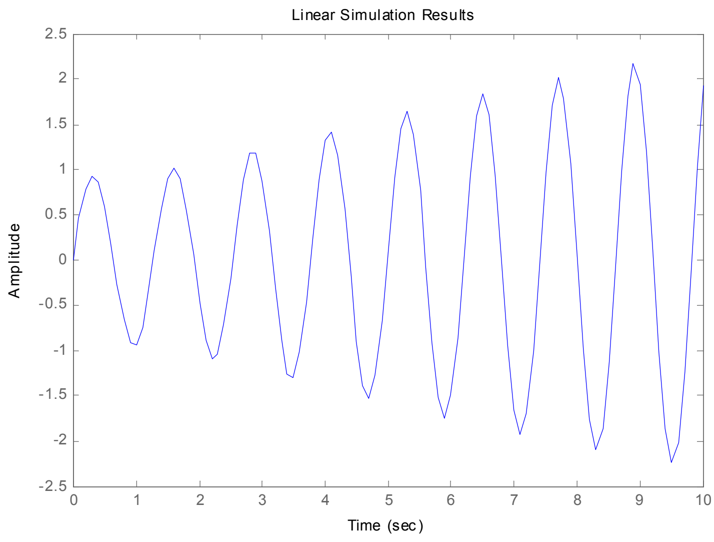
Bei 5.25rad/s tritt aber Resonanz auf, wie das folgende Verhalten des Wagenoberteils zeigt:



Wir betrachten nun das Verhalten der Radaufhängung bei einer Frequenz von 80rad/s:



Nun betrachten wir die Amplitude der Radaufhängung bei der Resonanzfrequenz von 5.25rad/s:



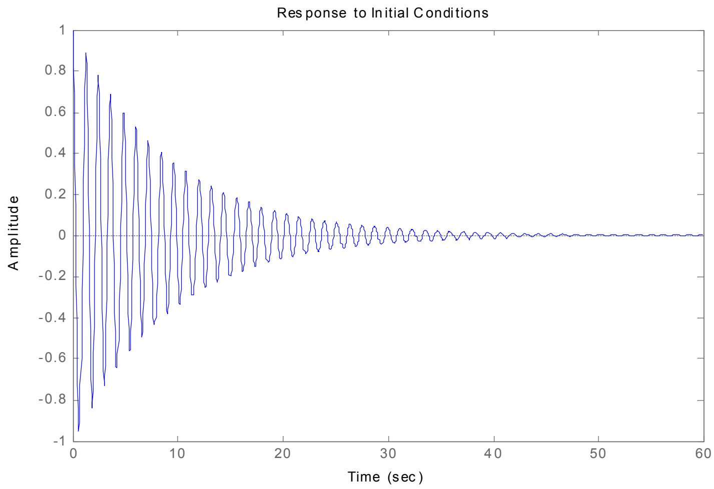
Die Radaufhängung weist also das gleiche Muster auf wie der Wagenoberteil. Die Auslenkung der Amplitude ist aber verschieden. Es ist nun anschaulich klar, dass die Amplitude im Bodeplot direkt mit der Schwingungsamplitude korreliert: Je höher die Amplitude im Bodeplot bei der Resonanzfrequenz ist, desto stärker ist die Ausprägung bzw. die Schwingungsamplitude im Resonanzfall.

All diese Erkenntnisse könnten wir nun nutzen, um unsere Kontrolleinheit u(t) aufzubauen.

Im folgenden wollen wir noch einige weitere Matlabbefehle anschauen. Die Funktion initial() ermöglicht es, einen Anfangszustand x0 zu wählen. Was für ein Verhalten weist unser Wagenoberteil auf, wenn wir ihn bei $x_1=1$ auslenken? Wir ergänzen das m-File wie folgt:

```
x0=[1,0,0,0];
initial(sys,x0');
```

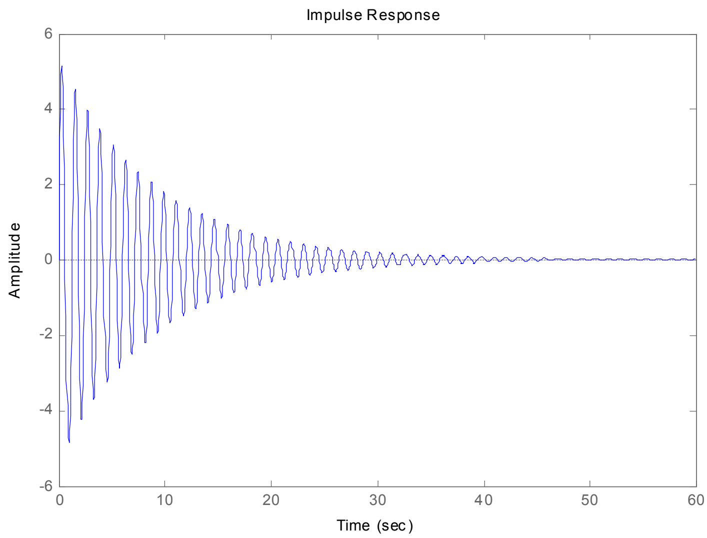
Wir erhalten:



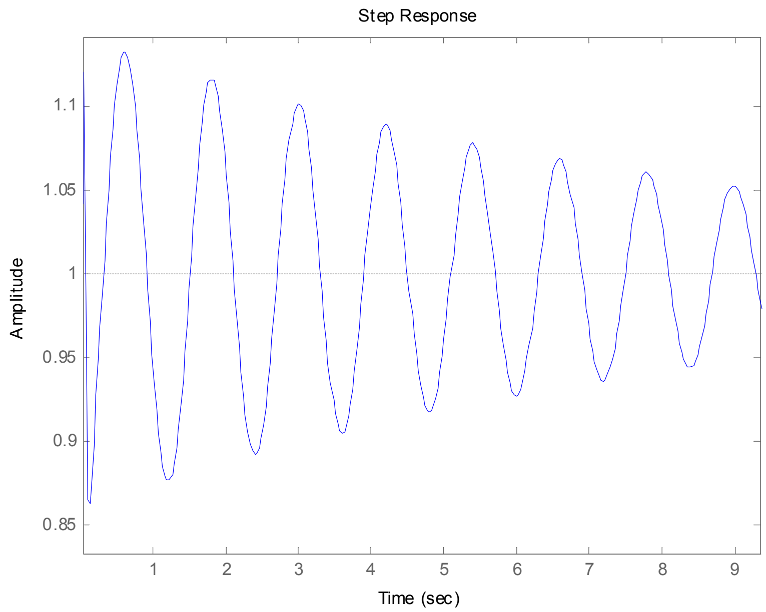
Die Funktion impulse() zeigt die Impulsantwort des Systems. Wir fügen folgende Zeile in unser m-File ein:

```
impulse(sys);
```

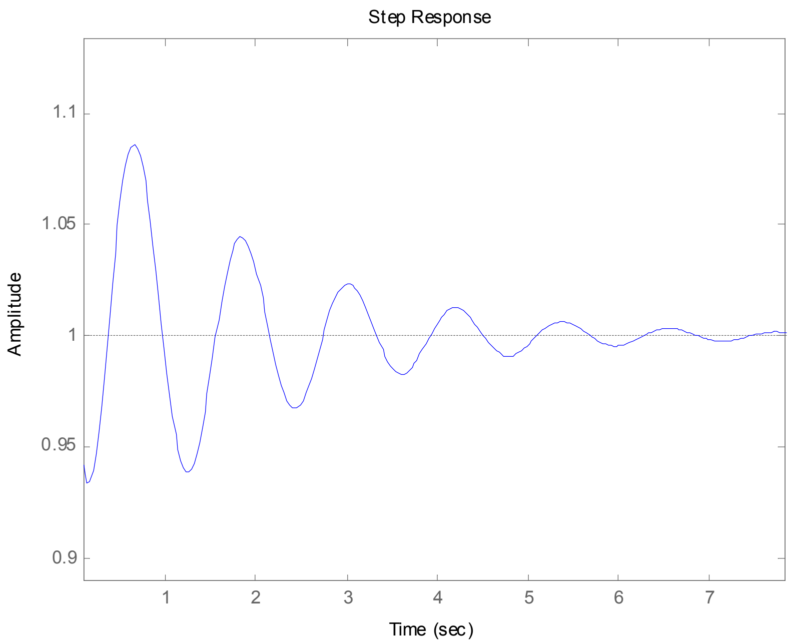
Für die Impulsantwort des Wagenoberteils erhalten wir:



Im folgenden wollen wir noch der Frage nachgehen, in wieweit die Dämpfung und die Federung von Bedeutung für das Verhalten der Schwingung ist. Da wir vorher mehrheitlich das Verhalten des Wagenoberteils untersucht haben, wenden wir uns der Radaufhängung zu. Zuerst plotten wir nochmals die Schrittantwort der Radaufhängung.

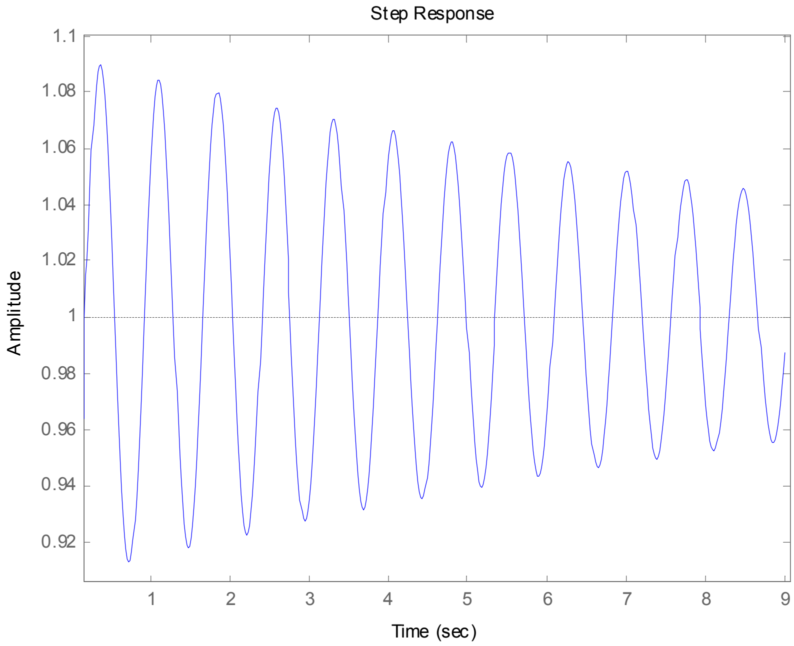


Nun vergrössern wir die Dämpfungskonstanten b_1 auf 2000Ns/m und b_2 auf 80000Ns/m. Wir erhalten:



Die Schwingung klingt also schneller ab; wie erwartet.

Nun untersuchen wir das Verhalten der Federn. Wir stellen die Dämpfungskonstanten wieder auf unseren Ausgangswert zurück und vergrössern die Federkonstanten K_1 auf 200kN/m und K_2 auf 2MN/m. Wir erhalten:



Das System klingt also wesentlich langsamer ab. In Tat und Wahrheit kann man zeigen, dass wenn die Federkonstanten gegen den Wert unendlich konvergieren und die Dämpfungskonstanten unverändert bleiben, dann geht der Abklingvorgang in eine periodische Schwingung über. Umgekehrt, wenn die Dämpfungskonstante gegen den Wert unendlich strebt und die Federkonstanten unverändert bleiben, dann ist der Abklingvorgang so stark, dass keine Schwingung mehr auftritt. Die Schwingungsamplitude nimmt dann für jeden Zeitpunkt den Wert null an.