Chaotische Systeme (Laborübung 7)

Lorenz-Attraktor

Der Lorenz-Attraktor wird durch folgendes nichtlineares DGL-System beschrieben:

(1) $x_1 = \quad c\,(x_1 \quad x_2)$

(2) $x_2 = a\,x_1 - x_2 \quad x_1\,x_3$

(3) $x_3 = b\,(x_1\,x_2 - x_3)$

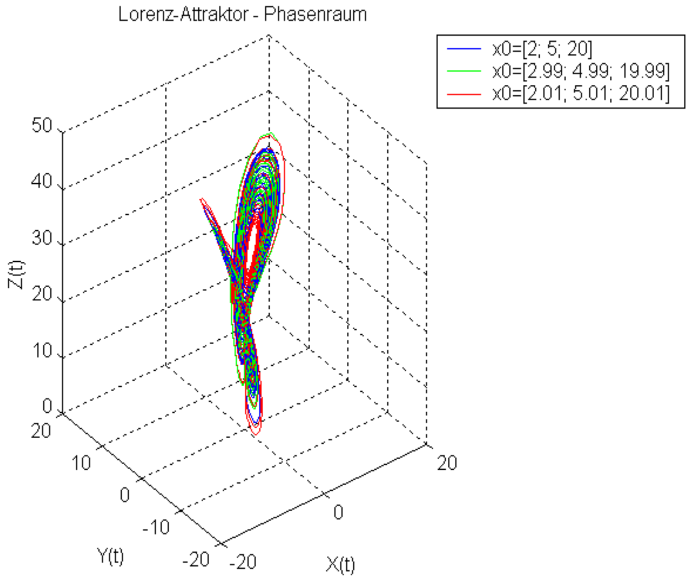
Wir simulieren nun den Lorenz-Attraktor mit Hilfe eines m-Files:

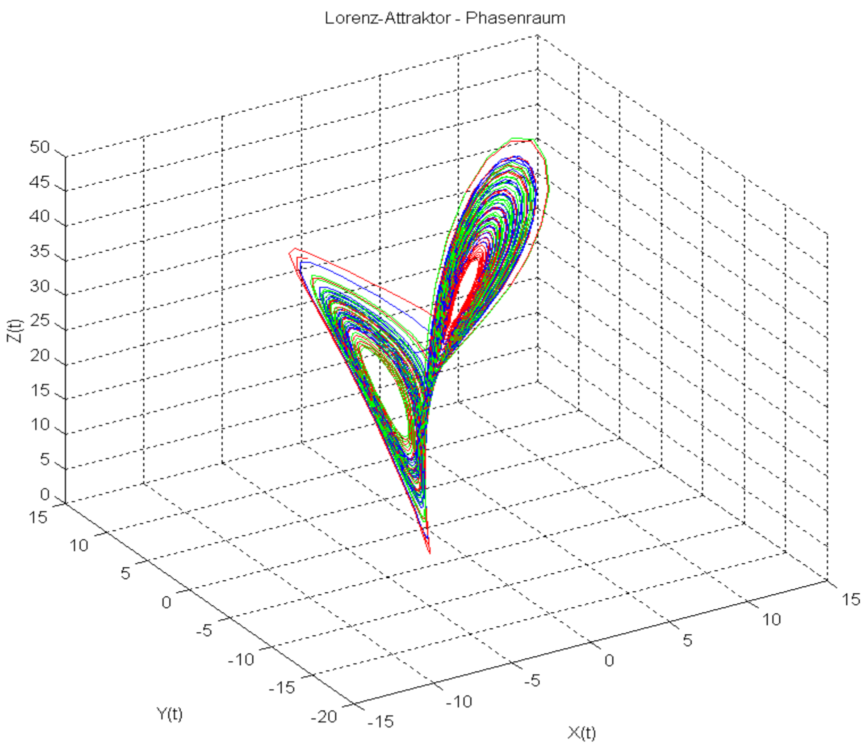
```
% Lorenz-Attraktor
% von Stephan Senn, D-ITET

clf     % Clear Figure
ts=0:.02:30;        % Zeitbasis ts in [s]

x0=[2; 5; 20];
[T,X] = ode45(@lorenzdgl,ts,x0);
plot3(X(:,1),X(:,2), X(:,3),'b');
hold on;

x0=[2.99; 4.99; 19.99];
[T,X] = ode45(@lorenzdgl,ts,x0);
plot3(X(:,1),X(:,2), X(:,3),'g');
hold on;

x0=[2.01; 5.01; 20.01];
[T,X] = ode45(@lorenzdgl,ts,x0);
plot3(X(:,1),X(:,2), X(:,3),'r'); % rote Kurve

title('Lorenz-Attraktor - Phasenraum');
xlabel('X(t)');
ylabel('Y(t)');
zlabel('Z(t)');
legend('x0=[2; 5; 20]','x0=[2.99; 4.99; 19.99]','x0=[2.01; 5.01; 20.01]');
grid on;
```

Dazu benötigen wir noch ein m-File für die Festlegung des DGL-Systems:

```
function lorenz=lorenzdgl(t,x)
% Parameter
a=28;
b=2.667;
c=10;
lorenz=[-c*(x(1)-x(2)); a*x(1)-x(2)-x(1)*x(3); b*(x(1)*x(2)-x(3))];
```

Wir erhalten folgendes Phasenportrait:





Schon kleine Änderungen der Startbedingungen haben einen grossen Einfluss auf den Funktionsverlauf des Lorenz-Attraktors. Diese Tatsache wird durch die drei ähnlichen Startbedingungen (rot, blau und grün) verdeutlicht. Obwohl die drei Startbedingungen sehr nahe beieinander liegen und man vermuten würde, dass die Bahn sich nur sehr geringfügig ändert, so zeigt der Funktionsverlauf des Lorenz-Attraktors, dass die Änderungen des Funktionsverlaufs doch beträchtlich sind. Dieser Effekt, den man auch Schmetterlingseffekt (Butterfly-Effect) bezeichnet, wurde von Edward N. Lorenz 1963 formuliert:

> *One meteorologist remarked that if the theory were correct, one flap of a seagull's wings would be enough to alter the course of the weather forever.*

Lorenz war Meteorologe und befasste sich mit der Voraussage von Wetterphänomenen. Da das Wetter ein höchst instabiles, chaotisches System ist, genügt der Flügelschlag eines Schmetterlings in Japan, um ein Unwetter in Europa auszulösen. Mit anderen Worten: Chaotische Systeme sind sehr empfindlich auf sehr kleine Änderungen. Kleine Änderungen an den Startbedingungen eines chaotischen Systems haben grosse Auswirkungen auf den Funktionsverlauf.

Van der Pole-Oszillator

Der Van der Pole-Oszillator wird durch folgendes nichtlineares DGL-System beschrieben:

(1) $x_1 = x_2$

(2) $x_2 = \quad x_1 \quad \mu\,(1 \quad x_1^2)\, x_2$

Wir simulieren nun dieses System für verschiedene μ. Unser m-File lautet:

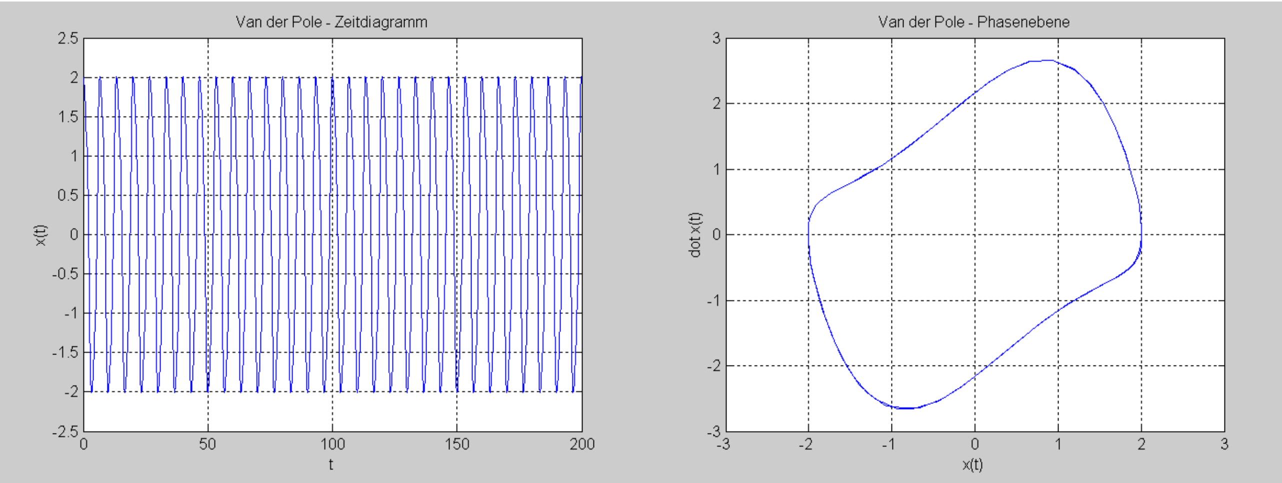
```
% Van der Pole-Oszillator
% von Stephan Senn, D-ITET

clf     % Clear Figure
ts = [0; 2000];  % Zeitbasis ts in [s]
x0=[2; 0];
[T,X] = ode15s(@vanpole,ts,x0);

plot(X(:,1),X(:,2),'b');
title('Van der Pole - Phasenebene');
xlabel('x(t)');
ylabel('dot x(t)');
grid on;

figure;
plot(T,X(:,1),'b');
title('Van der Pole - Zeitdiagramm');
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
grid on;
```

Dazu benötigen wir noch das nichtlineare DGL-System:

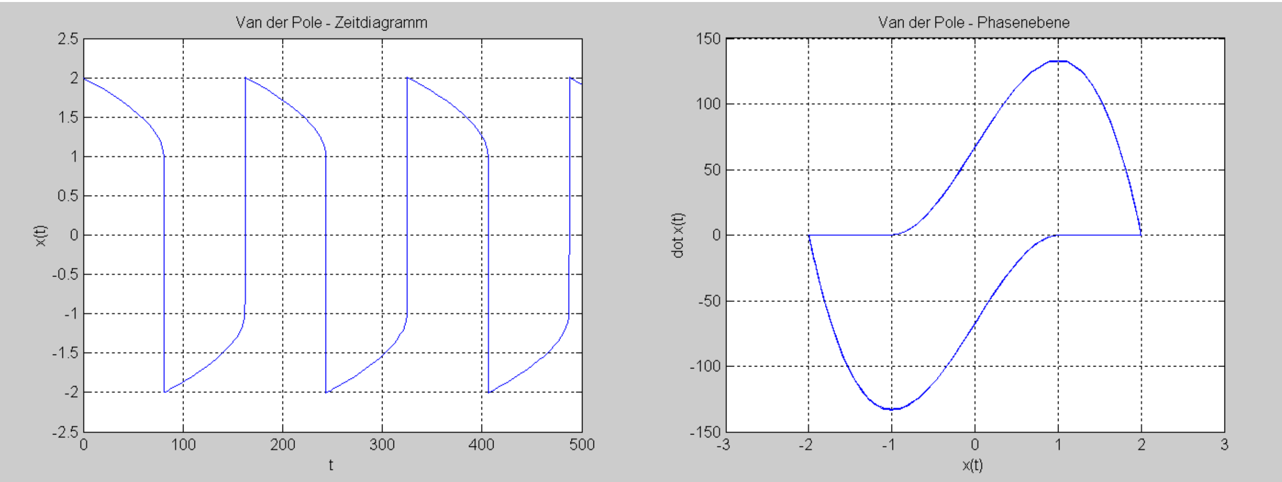
```
function vp=vanpole(t,x)

mu=1000; % Paramter

vp=[x(2); -x(1)+mu*(1-x(1)^2)*x(2)];
```

Für verschiedene μ erhalten wir folgende Resultate:

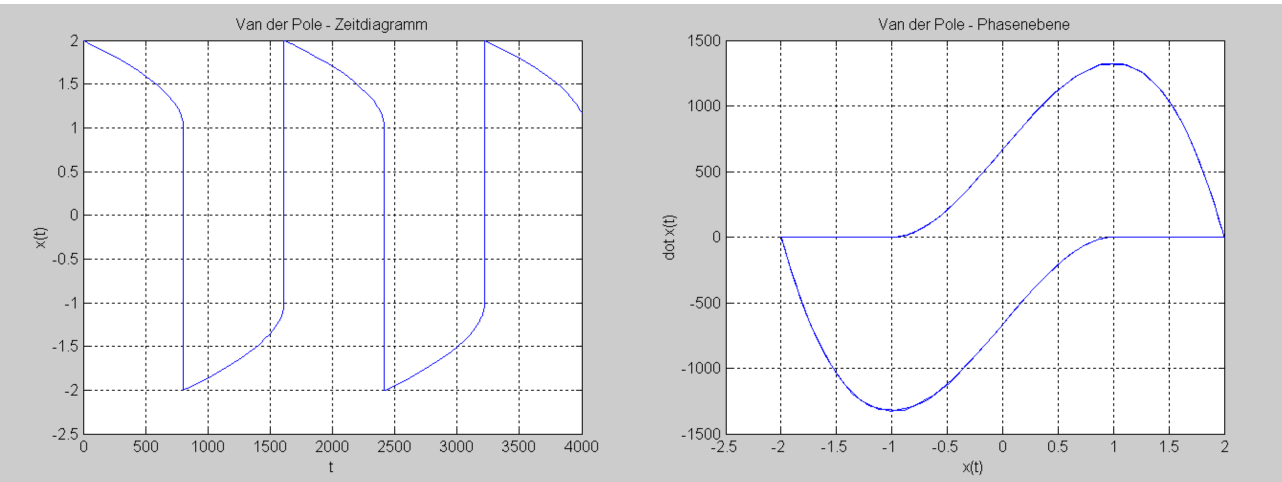
μ=1:



μ=100:



μ=1000:



Mit Hilfe von μ lässt sich die Frequenz des Oszillators festlegen. Je grösser μ wird, umso tiefer ist die Frequenz. Und je kleiner μ ist, umso höher ist die Frequenz des Oszillators. Da es sich hier um steife DGLs handelt, ist der ODE45-Solver zu langsam. Wir verwenden deshalb den ODE15s-

Solver. Ein DGL-System heisst steif (stiff), wenn gilt:

$y' = A\ y$ Matrizengleichung des Systems

$$\left|\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}\right| \gg 1$$

Dabei bezeichnet λ_{max} den grössten Eigenwert von A; λ_{min} und den kleinsten.