Nichtlineare Systeme (Laborübung 6)

Ein nichtlineares System wird durch nichtlineare Differentialgleichungen beschrieben. Nichtlineare Systeme werden durch folgende Matrixform beschrieben:

$$x = F(x, u, t)$$

Die Ausgangsfunktion lautet dann ebenfalls in Matrixform:

$$y = H(x, u, t)$$

Dabei beschreibt u(t) die Eingangsfunktionen bzw. die Anregung.

Ein Pendel wird ausgelenkt

Ein Pendel, das eine Starrkörperbewegung ausführt und dessen Lagerreibung vernachlässigt wird, bezeichnet man als mathematisches Pendel. Wird die Lagerreibung berücksichtigt, so spricht man von einem physikalischen Pendel. Die allgemeine Differentialgleichung lautet:

$$I = \quad m \; g \sin(\quad) \; l \quad b$$

Die Massenträgheit ergibt sich bei einer punktförmigen Masse zu:

$$I = m \; l^2$$

Somit erhalten wir:

$$= \frac{g \sin(\quad)}{l} - \frac{b}{m \; l^2} \qquad = \frac{g \sin(\quad)}{l} - k \qquad \text{mit} \quad k = \frac{b}{m \; l^2}$$

Das nichtlineare DGL-System lautet deshalb:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{g \sin(x_1)}{l} \quad k \; x_2 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \quad x_1 = \quad , \quad x_2 = x_1 = \quad = \omega$$

Somit gilt:

mathematisches Pendel: $k = 0$

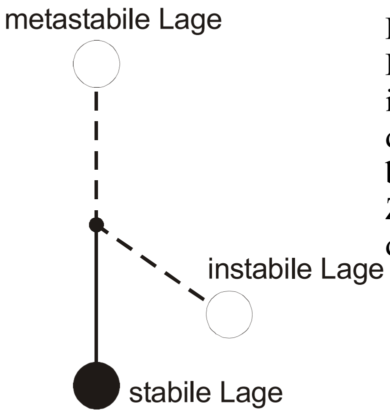
$$= \frac{g \sin(\quad)}{l}$$

physikalisches Pendel: $k \neq 0$

$$= \frac{g \sin(\quad)}{l} - k$$

Gleichgewichtslagen

Vorausgesetzt, dass keine äusseren Kräfte auf das Pendel einwirken, ergeben sich drei Gleichgewichtslagen, je nach Anfangsbedingungen:



Die stabile Lage tritt immer am Ende einer Pendelschwingung auf. Das Pendel geht hier in den Ruhezustand über. Die metastabile Lage ist ein Gleichgewichtszustand, bei dem schon die kleinste Änderung der Lage des Pendels genügt, um diese Lage zu verlassen. Deshalb bezeichnet man diese Lage auch als metastabile Lage. Alle übrigen Zustände des Pendels sind instabil, d.h. das Pendel verharrt nicht in dieser Lage.

Phasenportrait

Das Phasenportrait bzw. die Trajektorien eines linearen Systems haben wir in der Übung 5 behandelt. Wie sieht nun das Phasenportrait eines nichtlinearen Systems aus?

Um das Phasenportrait eines nichtlinearen Systems zu erhalten, müssen wir das nichtlineare DGL-System lösen. Diese Aufgabe übernimmt Matlab mit Hilfe des ode45-Solvers. Die ode45-Funktion ist wie folgt aufgebaut:

[T,Y] = ODE45(ODEFUN,TSPAN,Y0)

ODEFUN: Legt das DGL-System fest.

TSPAN: Legt das Zeitintervall fest.

Y0: Legt die Anfangsbedingungen fest.

Als erstes legen wir das DGL-System im m-File pendel.m fest:

```
function x_dot=pendel(t,x)

% Parameter
k=0; % in [1/s]
g=9.81; % in [m/s^2]
l=9.81; % in [m]

x_dot(1)=x(2);
x_dot(2)=-g/l*sin(x(1))-k*x(2);
x_dot=x_dot';
```

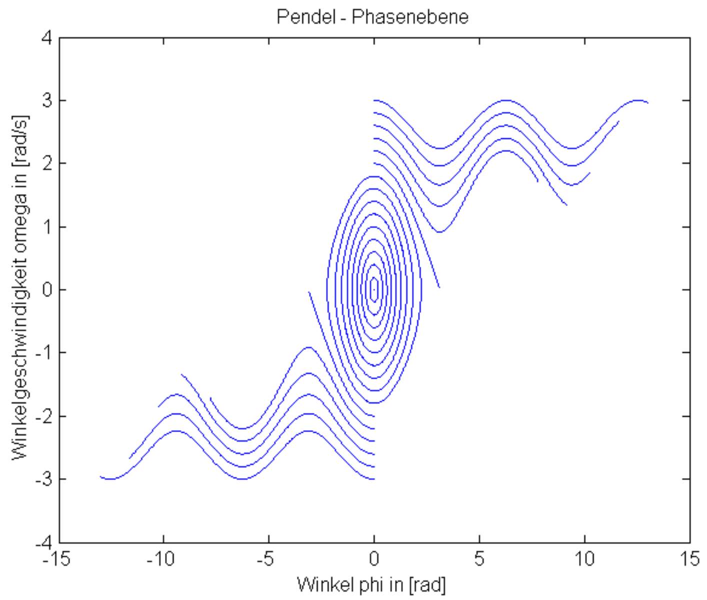
Nun bestimmen wir unser Phasenportrait mit Hilfe des ode45-Solvers. Das m-File portrait_pendel.m sieht wie folgt aus:

```
clf     % Clear Figure
ts=0:.01:5;        % Zeitbasis ts in [s]
```

```
for i=-3:.2:3
    x0=[0; i]; % verschiedene Startpunkte
    [T,X] = ode45(@pendel,ts,x0);
    plot(X(:,1),X(:,2),'b');
    hold on;
end
title('Pendel - Phasenebene');
xlabel('Winkel phi in rad');
ylabel('Winkelgeschwindigkeit omega in rad/s');

% Trajektorientool
but = 1;
while but == 1
   [x0,y0,but] = ginput(1);
   plot(x0,y0,'ro');
   [t,xx]=ode45(@pendel,ts,[x0 y0]);
   plot(xx(:,1),xx(:,2),'r');
end
hold off;
```

Bei diesem Beispiel wird das Pendel aus der Ruhelage bei =0 mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten ω ausgelenkt.[1] Das Zeitintervall ts bleibt konstant. Das Trajektorientool ermöglicht das Zeichnen einer einzelnen Trajektorie ausgehend von einer bestimmten Anfangsbedingung via Mouseklick.[2] Für k=0 (verlustfreies Pendel), k=0.1s^{-1} und k=1s^{-1} erhalten wir:

Abbildung 1: k=0



1 Zur Erinnerung es gilt: $x_1 =$, $x_2 = x_1 = \; = \omega$

2 Dieses Werkzeug wurde schon in der letzten Serie bereitgestellt.

Abbildung 2: $k=0.1s^{-1}$

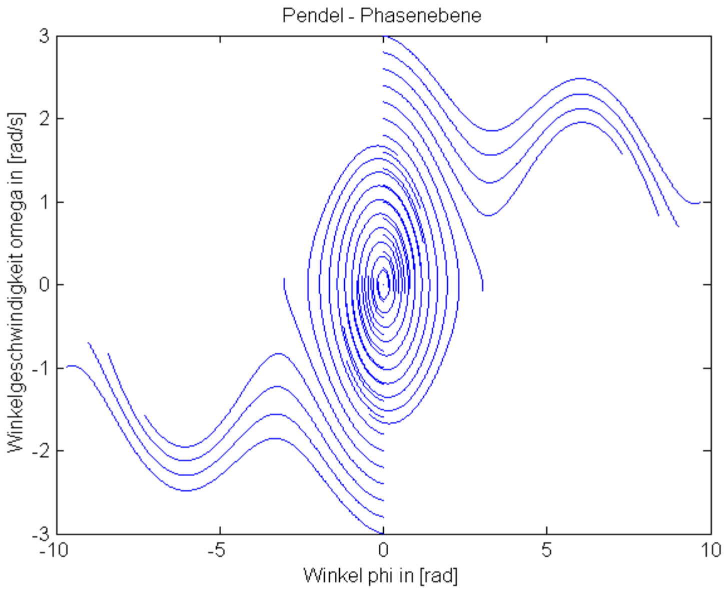
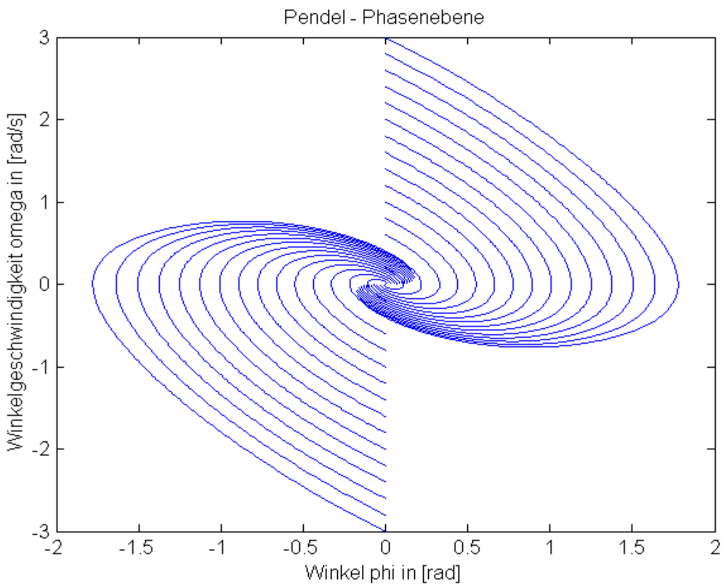


Abbildung 3: $k=1s^{-1}$



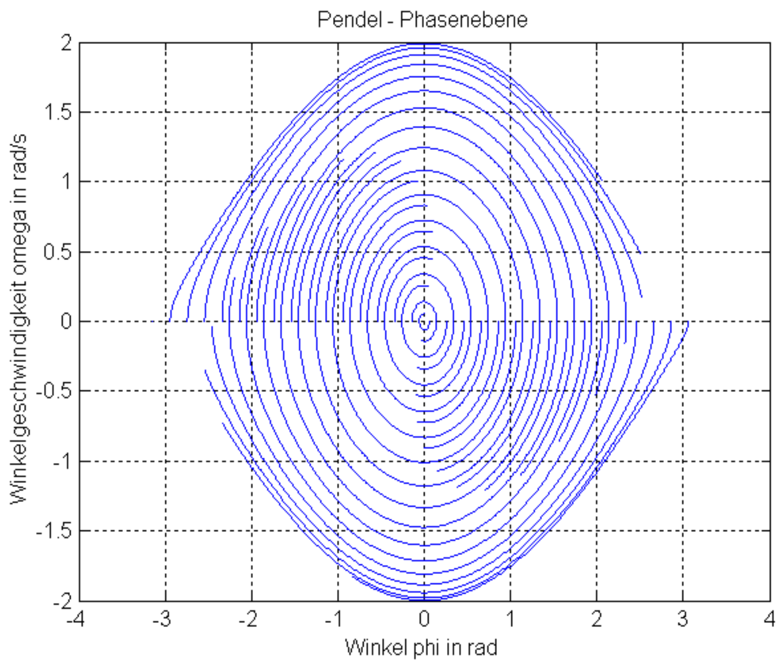
Umso stärker die Dämpfung k des Pendels ist, desto schneller klingt die Schwingung des Pendels ab, und das Pendel geht in den stabilen Ruhezustand über (bei =0). Wie lassen sich nun die verschiedenen Phasenportraits deuten? - Bei Abbildung 1 ist die Dämpfung k=0 und folglich setzt sich die Energie des Pendels zu jeder Lage nur aus potentieller und kinematischer Energie zusammen. Ab einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit dreht sich das Pendel um die eigene Achse. Das Pendel 'pendelt' dann nicht mehr, sondern dreht sich wie ein Uhrzeiger um eine feste Achse. Die Kreise in der Mitte der Abbildung bezeichnen den Pendelvorgang, während die Linien, die von den Kreisen 'weglaufen', die Drehbewegungen beschreiben. Hier ist offensichtlich die Winkelgeschwindigkeit genügend gross, sodass das Pendel von einer Pendelbewegung in eine Drehbewegung übergeht. Da das Pendel im Fall k=0 ideal ist, also keine Reibung aufweist, wird es ewig weiterpendeln bzw. weiterdrehen. Die Schwingung kommt somit nie in eine stabile Ruhelage. Tritt nun Reibung auf, wie in Abbildung 2 und 3, so wird die Schwingung gedämpft und das Pendel klingt nach einer bestimmten Zeit ab und geht in den stabilen Ruhezustand über. Die Abklingzeit ist wesentlich abhängig von der Stärke der Dämpfung. Bei grosser Dämpfung, wie in Abbildung 3, klingt das Pendel sehr schnell ab. Hier kann das Pendel auch nicht mehr um die eigene Achse drehen, da die Dämpfung zu stark ist. Bei Abbildung 2 wird die stabile Lage erst nach sehr langer Zeit errreicht. Die Abklingzeit ist hier sehr lange. Aufgrund der schwachen Dämpfung kann das Pendel hier um die eigene Achse drehen bei entsprechender Anfangsgeschwindigkeit.

Nun sei die Anfangsgeschwindigkeit $\omega_0=0$. Wir variieren nun den Startwinkel . Das m-File portrait_pendel.m wird wie folgt ergänzt:

```
figure;
for i=0:.2:pi
    x0=[i; 0]; % verschiedene Startpunkte
    [T,X] = ode45(@pendel,ts,x0);
    plot(X(:,1),X(:,2),'b');
    hold on;
end
title('Pendel - Phasenebene');
xlabel('Winkel phi in rad');
ylabel('Winkelgeschwindigkeit omega in rad/s');
grid on;
```

Für k=0 (verlustfreies Pendel), $k=0.1s^{-1}$ und $k=1s^{-1}$ erhalten wir:

<u>Abbildung 4: k=0</u>



<u>Abbildung 5: $k=0.1s^{-1}$</u>

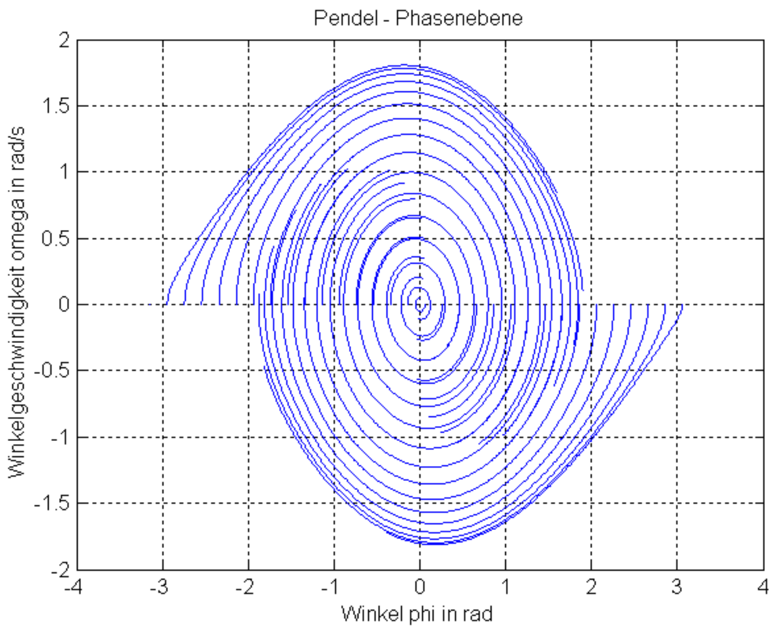
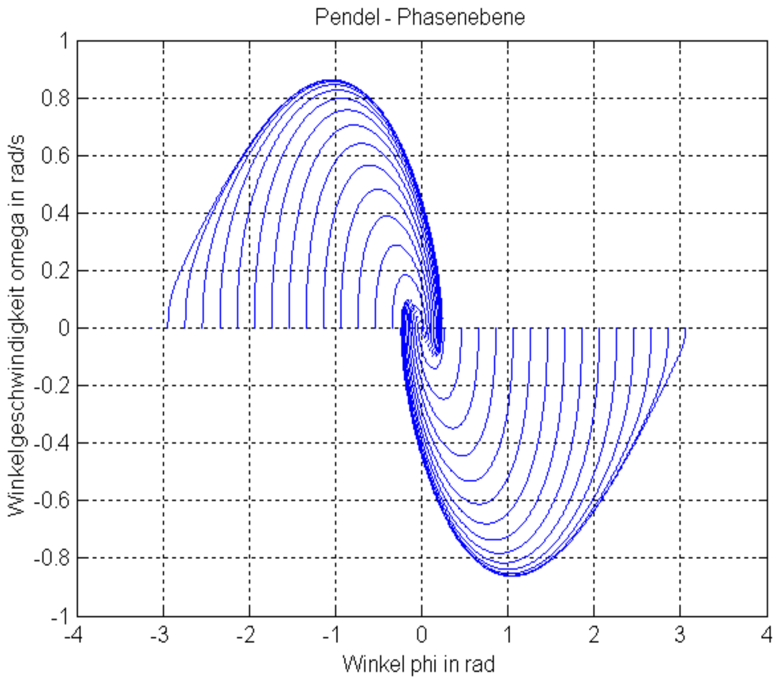


Abbildung 6: $k=1s^{-1}$

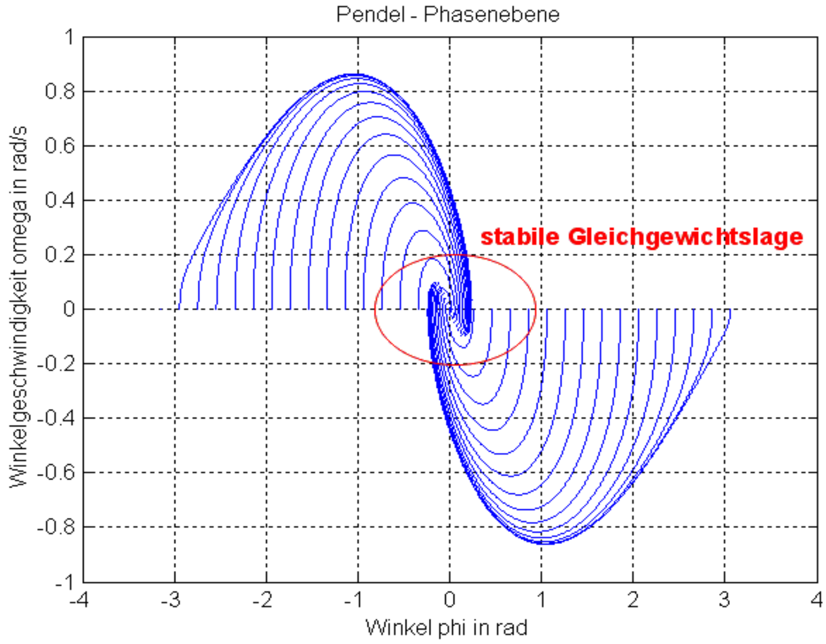


Auch in diesem Fall erkennen wir gut den Zusammenhang zwischen Dämpfung und Abklingverhalten des Pendels. Je stärker die Dämpfung ist, desto schneller klingt das Pendel ab und geht in den stabilen Ruhezustand.

Stabile Gleichgewichtslagen erkennen

In der Praxis sind die Systeme meist von komplizierter Natur und die Gleichgewichtslagen können nicht – wie im Fall unseres Pendels – intuitiv gefunden werden. Hier erweist sich das Phasenportrait als sehr nützlich. Wir suchen solche Punkte im Phasenportrait, bei denen die

Trajektorien zusammenlaufen. Laufen alle Trajektorien in einer bestimmten Umgebung gegen einen festen Punkt, so handelt es sich um einen stabilen Gleichgewichtspunkt bzw. um eine stabile Gleichgewichtslage. Dies zeigt das folgende Beispiel unseres Pendels:



Alle Trajektorien laufen hier im Punkt (0,0) zusammen. Die einzige stabile Gleichgewichtslage befindet sich also bei   =0, was unseren Erwartungen entspricht.

Linearisierungen von nichtlinearen Systemen

Da die numerische Berechnung eines nichtlinearen DGL-Systems meist mit sehr viel Rechenzeit verbunden ist und man in der Praxis oft nur an einer groben Näherung interessiert ist, so kann man das nichtlineare DGL-System an einem bestimmten Punkt (meist Arbeitspunkt oder Gleichgewichtspunkt) linearisieren mit Hilfe der Taylorreihe. Die allgemeine Taylorreihe für mehrere Veränderliche lautet:

$$f(x \quad h, y \quad k, \ldots, t \quad l) = f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h \quad \frac{\partial}{\partial y} k \quad \ldots \quad \frac{\partial}{\partial t} l \right)^i f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \quad R_n$$

R_n: Restglied

Diese Formel gilt auch dann, wenn x,y,... Spaltenvektoren sind. Allerdings müssen dann alle partiellen Ableitungen der Komponenten von x,y,... gebildet werden (Jacobimatrix). Wird nun die Reihenentwicklung bei n=1 abgebrochen, so erhält man eine lineare Funktion für f(x+h,y+h,...,t+l). Allerdings muss man sich dabei vergewissern, dass man bewusst einen Fehler, nämlich denjenigen der Restglieder, in Kauf nimmt. Es muss von Fall zu Fall abgewogen werden, ob eine solche Linearisierung sinnvoll ist. Hier erweisen sich die Restgliedabschätzungen (z.B. von Lagrange) als sehr hilfreich. Eine solche Betrachtung würde aber hier zu weit führen. Wir begnügen uns mit dem Vergleich der Linearisierung mit der numerisch annähernd exakten Lösung. Für eine linearisierte Funktion gilt dann:

$$f(x \quad h, y \quad k, \ldots, t \quad l) \approx f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} h \quad \frac{\partial}{\partial y} k \quad \ldots \quad \frac{\partial}{\partial t} l \right) f(x_0, y_0, \ldots, t_0)$$

Für ein nichtlineares DGL-System ergibt sich daraus:

$$F(x \quad \hat{x}, u \quad \hat{u}, t) \approx F(x_0, u_0, t) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} \quad \frac{\partial}{\partial u} \hat{u} \right) F(x_0, u_0, t)$$

Somit gilt:

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = F(x_0, u_0, t) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} \quad \frac{\partial}{\partial u} \hat{u} \right) F(x_0, u_0, t)$$ (1) (linearisierte Systemmatrix)

$$\hat{y} = H(x_0, u_0, t) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} \quad \frac{\partial}{\partial u} \hat{u} \right) H(x_0, u_0, t)$$ (2) (linearisierte Ausgangsfunktion)

Wir kehren nun zu unserem Pendel zurück. Die Systemmatrix F(x, u, t) lautet:

$$F(x, u, t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{g \sin(x_1)}{l} \quad k \; x_2 \end{bmatrix}$$

Mit $\frac{g}{l} = 1$ und $k = 1$ erhalten wir:

$$F(x, u, t) = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin(x_1) \quad x_2 \end{bmatrix}$$

Die Jacobimatrizen von F lauten:

$$\frac{\partial F(x, u, t)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x_1) & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\frac{\partial F(x, u, t)}{\partial u} = 0 \quad (4)$$

Wir setzten nun (3) und (4) in (1) ein und erhalten:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \sin(\quad_0) \quad \omega_0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(\quad_0) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

Da wir F(x, u, t) in der Gleichgewichtslage linearisieren gilt:

$$x_{10} = \quad_0 = 0$$

$$x_{20} = \omega_0 = 0$$

Mit $\quad = \hat{x}_1$ und $\omega = \hat{x}_2$ erhalten wir:

$$\begin{bmatrix} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \quad \omega \\ \sin(\quad_0) \quad \omega_0 \quad \cos(\quad_0) \qquad \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \quad \omega \end{bmatrix} \quad (5)$$

Wir begnügen uns hier mit dem Lösen der Systemmatrix F(x, u, t). Die Linearisierung der Ausgangsfunktion H(x, u, t) verläuft analog. Unsere m-Files lauten:

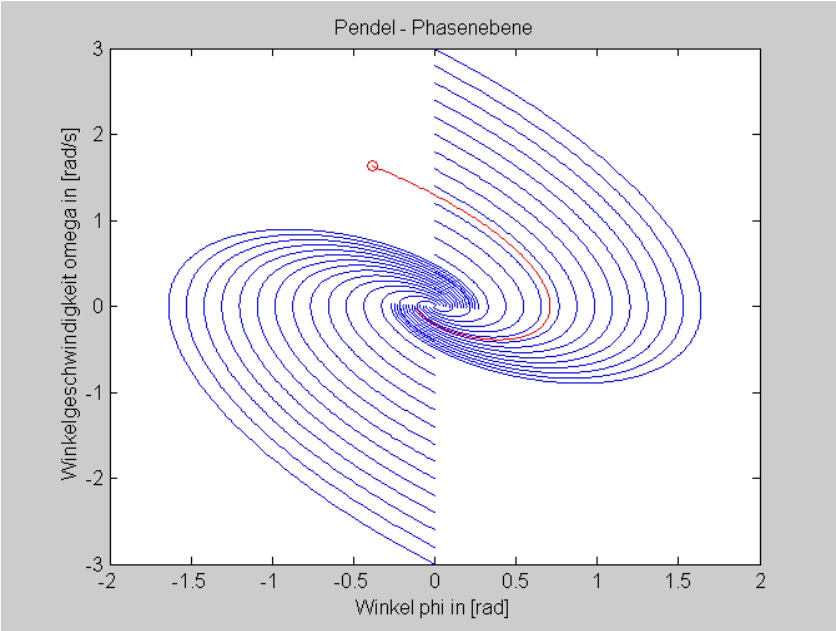
pendellin.m

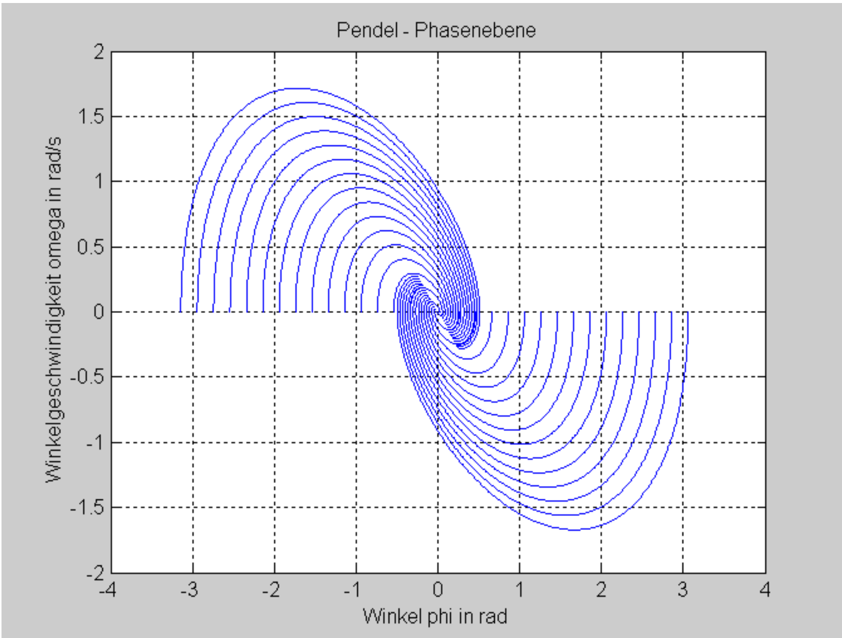
```
function x_dot=pendellin(t,x)


x_dot(1)=x(2);
x_dot(2)=-x(1)-x(2);
x_dot=x_dot';
```

portrait_pendel.m

```
% Simulation eines Pendels
% von Stephan Senn, D-ITET

clf    % Clear Figure
ts=0:.01:5;        % Zeitbasis ts in [s]

for i=-3:.2:3
    x0=[0; i]; % verschiedene Startpunkte
    [T,X] = ode45(@pendellin,ts,x0);
    plot(X(:,1),X(:,2),'b');
    hold on;
end
title('Pendel - Phasenebene');
xlabel('Winkel phi in [rad]');
ylabel('Winkelgeschwindigkeit omega in [rad/s]');

% Trajektorientool
but = 1;
while but == 1
   [x0,y0,but] = ginput(1);
   plot(x0,y0,'ro');
   [t,xx]=ode45(@pendellin,ts,[x0 y0]);
   plot(xx(:,1),xx(:,2),'r');
end
```

Wir erhalten folgende Resultate:





Bei der oberen Abbildung wurde die Ausgangswinkelgeschwindigkeit variiert, während der Ausgangswinkel null betrug. Bei der unteren Abbildung war die Ausgangswinkelgeschwindigkeit null, während der Ausgangswinkel variiert wurde. Wir erkennen deutlich, wie die Trajektorien gegen den stabilen Gleichgewichtspunkt (0,0) streben. Der Winkel und die Winkelgeschwindigkeit sind bei dieser Lage gleich null. Es sei hier nochmals erwähnt, dass dies keine exakte Lösung ist, sondern nur eine Näherung um den stabilen Gleichgewichtspunkt (0,0).