Laborübung 4

Kontrollfragen

Linearität

Gegeben sei eine Abbildung u, die die Elemente t_1 und t_2 des Vektorraums V in den Vektorraum W linear abbildet. Für die lineare Abbildung gilt dann:

(i) $u(a\ t_1\quad b\ t_2)=u(a\ t_1)\quad u(b\ t_2),\quad a,b$

(ii) $u(a\ t_1)=a\ u(t_1)$ bzw. $u(b\ t_2)=b\ u(t_2)\qquad a,b$

Ein System ist linear, falls ein Eingangssignal u(t) als Linearkombination der Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ aufgefasst werden kann. Es soll dann also gelten:

$$u(a\ t_1\quad b\ t_2)=u(a\ t_1)\quad u(b\ t_2)=a\ u(t_1)\quad b\ u(t_2)\qquad a,b$$

$$u(t)=a\ u_1(t)\quad b\ u_2(t)\ \text{ mit }\ t=a\ t_1\quad b\ t_2\ ,\ u_1(t)=u\left(\frac{t\quad b\ t_2}{a}\right)\ ,\ u_2(t)=u\left(\frac{t\quad a\ t_1}{b}\right)$$

Das Eingangssignal u(t) ist also als Superposition der Signale $u_1(t)$ und $u_2(t)$ aufzufassen. Die Linearität bleibt bei der Laplacetransformation erhalten:

$$U(s)=a\ U_1(s)\quad b\ U_2(s)$$

Pollagen und Stabilität

Pole in der linken Halbebene (LHE)	Das System ist stabil und klingt nach einer bestimmten Zeit ab.
Pole in der rechten Halbebene (RHE)	Das System ist instabil und schaukelt sich bis ins unendliche auf.
Pole auf der imaginären Achse	Das System oszilliert. Es klingt weder ab noch ist ein Aufschaukelungsprozess erkennbar.
Polstellen sowohl in der linken als auch in der rechten Halbebene (Metastabiles System)	Hier entscheidet die Anregung, ob das System in einen stabilen oder instabilen Arbeitspunkt gelangt.

<u>Beweis:</u>

Gegeben sei eine homogene DGL n-ter Ordnung: $a_1\ y(t)\quad a_2\ y'(t)\quad ...\quad a_n\ y^n(t)=0$ (1)

Es gilt: $a_1, a_2, ...\qquad ,\ n$

Wir verwenden folgenden Ansatz: $y(t)=e^{\gamma\,t}$ (2)

Durch einsetzen von (2) in (1) erhalten wir das sogenannte charakteristische Polynom:

$$a_1\quad a_2\ \gamma\quad ...\quad a_n\ \gamma^n=0\quad (3)$$

Wir bestimmen nun die Lösungen des charakt. Polynoms (3) und erhalten: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, ..., \gamma_n$

Die allgemeine Lösung lautet daher: $y(t)=C_1\ e^{\gamma_1 t}\quad C_2\ e^{\gamma_2 t}\quad ...\quad C_n\ e^{\gamma_n t}$ (4)

$C_1, C_2, ...$ sind Konstanten. Sie werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Die Lösung in (4) ist nur dann für $t \to \infty$ beschränkt, wenn die negativen reellen Lösungen des charakt. Polynoms überwiegen. In diesem Fall sprechen wir von einem stabilen System. Die Polstellen, die Lösungen des charakt. Polynoms, sind in der linken Halbebene. Im umgekehrten Fall ist die Lösung unbeschränkt. Das System oszilliert, wenn die Lösungen komplex sind. In diesem Fall sind die Lösungen des charakt. Polynoms (3) komplex. Es gilt:

$$\gamma_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \sin(\omega t) \quad C_2 \cos(\omega t)\right)$$

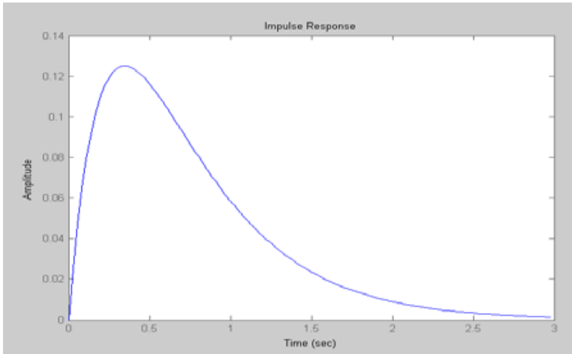
Die folgende Tabelle zeigt die Stabilität eines Systems anhand von Beispiele:

Stabiles System

Übertragungsfunktion:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 \quad 6s \quad 8}$$

Polstellen: (-2,0),(-4,0)

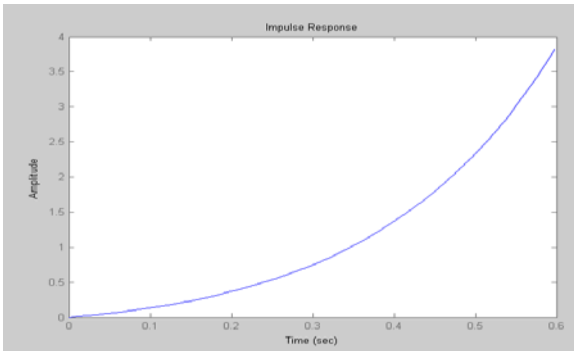


Instabiles System

Übertragungsfunktion:

$$T(s) = \frac{1}{s^2 \quad 6s \quad 8}$$

Polstellen: (2,0),(4,0)

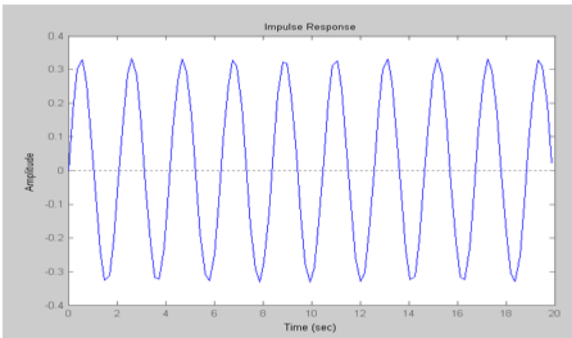


Oszillierendes System

Übertragungsfunktion:

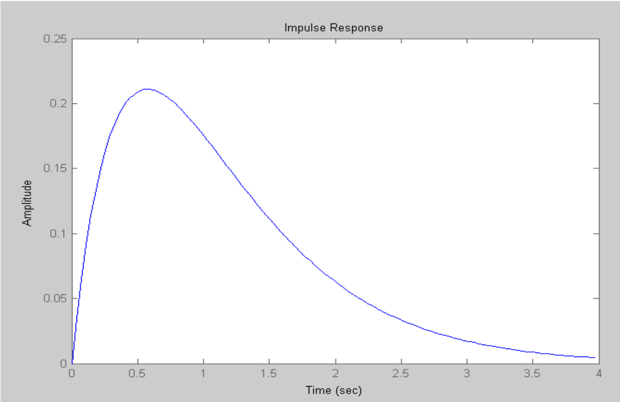
$$T(s) = \frac{1}{s^2 \quad 9}$$

Polstellen: (0,3i),(0,-3i)

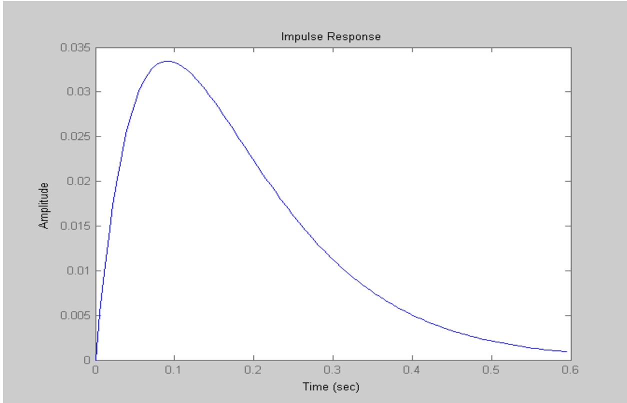


Allgemein gilt bei stabilen Systemen: Je weiter die Polstellen vom Nullpunkt bzw. von der y-Achse entfernt sind, desto stärker ist die Dämpfung und desto schneller klingt das System ab. Dies zeigt die folgende Abbildung.

Polstellen sind : (-1.5,0),(-2,0)



Polstellen sind nahe beieinander.(-10,0),(-12,0)



Aufgabe 4.1

Wir laplacieren die Matrixzustandsgleichung und erhalten:

(1a) $s\,X(s) - x(0) = A\,X(s) + b\,U(s)$

(1b) $(I\,s - A)\,X(s) = b\,U(s) + x(0)$

(1c) $X(s) = (I\,s - A)^{-1}(b\,U(s) + x(0))$

Für eine inverse Matrix M gilt:

$$M^{-1} = \frac{adj(M)}{det(M)}$$

Daher erhalten wir für (1):

(1d) $X(s) = \dfrac{adj(I\,s - A)}{det(I\,s - A)}(b\,U(s) + x(0))$

Wir laplacieren nun die Matrixausgangsgleichung. Wir erhalten:

(2) $Y(s) = c^T\,X(s)$

Die Übertragungsfunktion ist wie folgt definiert:

(3) $T(s) = \dfrac{Output(s)}{Input(s)}$

Daher gilt für die einzelnen Übertragungsfunktionen:

$$T_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)} \quad , \quad T_{12}(s) = \frac{Y_1(s)}{X_2(s)}$$

$$T_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{X_1(s)} \quad , \quad T_{22}(s) = \frac{Y_2(s)}{X_2(s)}$$

Bemerkung: $X_1(s)$, $Y_1(s)$, usw. sind Komponenten der Matrix X(s) und Y(s).

Aufgabe 4.2

Die Nullstellen des Polynoms im Nenner der Übertragungsfunktion bezeichnet man als Polstellen.

Gegeben sei nun eine Zustandsbeschreibung der Form:

$x = A\ x\quad B\ q(t)$ Zustandsgleichungen in Matrizenform

$y(t) = C\ x\quad D\ q(t)$ Ausgangsfunktion in Matrizenform

Unter diesen Umständen gilt:

Die Polstellen des Systems bzw. der Übertragungsfunktion sind gerade die Eigenwerte der Matrix A und somit die Lösung des charakteristischen Polynoms $det(A - I\ \lambda) = 0$.

Wir gehen nun das m-File Schritt für Schritt durch und erklären die einzelnen Passagen:

Zuerst wird das System definiert und ein Systemobjekt erzeugt.

```
A=[-2 -1;1 -2];
b=[1;2]; c=[1 0]; d=0;
sys = ss( A,b,c,d);
```

Dann wird die Übertragungsfunktion des Systems der Variablen TF zugewiesen und direkt auf der Kommandozeile ausgegeben.

```
TF=tf(sys)
```

Die Koeffizienten des Zählers num und des Nenners den der Übertragungsfunktion werden bestimmt und direkt ausgegeben.

```
[num,den]=tfdata(sys, 'v')
```

Die Polstellen des Systems werden bestimmt, der Variablen Pol zugewiesen und ausgegeben.

```
Pol=pole(sys)
```

Die Eigenwerte der Matrix A werden berechnet, der Variablen EW zugewiesen und ausgegeben.

```
EW=eig(A)
```

Die Nullstellen des Nenner-Polynoms der Übertragungsfunktion werden bestimmt und ausgegeben.

```
Roots=roots(den)
```

Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von A wird der Variablen cha_poly zugewiesen und ausgegeben.

```
cha_poly=poly(A)
```

Das State-Space-System (SS) wird in ein Transfer-Function-System (TF) transformiert. Die Koeffizienten des Zählers num und des Nenners den der Übertragungsfunktion werden bestimmt und direkt ausgegeben.

```
[num,den]=ss2tf(A,b,c,d)
```

Die Nullstellen des Nenner-Polynoms den werden ermittelt, der Variablen Wurzel zugewiesen und ausgegeben.

```
Wurzel=roots(den)
```

Die Ausgabe des m-Files ergibt:

```
Transfer function:
s + 2.255e-016
--------------
s^2 + 4 s + 5
num =
      0    1.0000    0.0000
den =
    1     4     5
Pol =
  -2.0000 + 1.0000i
  -2.0000 – 1.0000i
EW =
  -2.0000 + 1.0000i
  -2.0000 - 1.0000i
```

```
Roots =
  -2.0000 + 1.0000i
  -2.0000 - 1.0000i
cha_poly =
    1     4     5
num =
    0     1     0
den =
    1     4     5
Wurzel =
  -2.0000 + 1.0000i
  -2.0000 - 1.0000i
```

Aufgabe 4.3

Im folgenden soll ein gekoppelter Schwinger aus zwei Massen simuliert werden. Die Auslenkung erfolge nur horizontal, also in x-Richtung. Eine Querauslenkung in y-Richtung erfolgt nicht.

Wir stellen zuerst die Zustandsgleichungen auf:

(1) $m_1\, x_1 = \quad x_1\, k_{10} \quad (x_2 \quad x_1)\, k_{12}$

(2) $m_2\, x_2 = \quad x_2\, k_{20} \quad (x_2 \quad x_1)\, k_{12}$

Wir schreiben nun dieses DGL-System um in Matrixform[1]:

$$x = A \;\; x \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Wir erhalten also:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\dfrac{k_{10} \quad k_{12}}{m_1}\right) & 0 & \dfrac{k_{12}}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_{12}}{m_2} & 0 & \left(\dfrac{k_{12} \quad k_{20}}{m_2}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1 Dieses System besitzt keine Eingangssignal, daher ist B=0.

Für die Ausgangsfunktion erhalten wir in Matrixform[2]:

$$y = C\ x \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

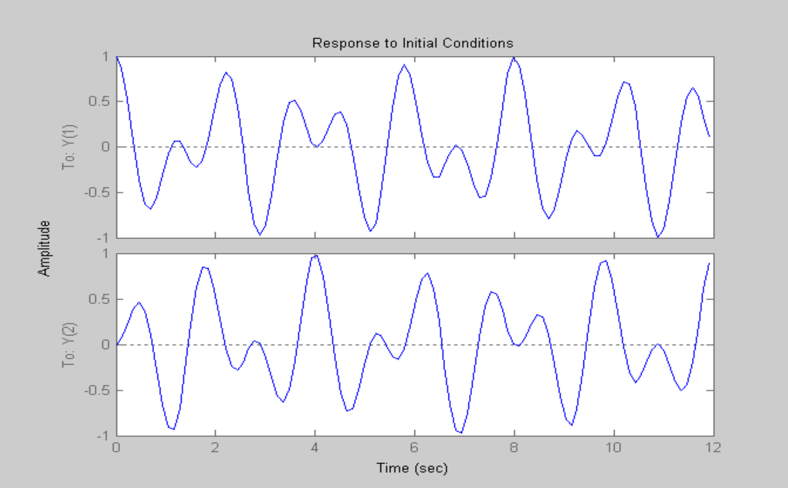
Nun können wir unser System simulieren. Das m-File lautet:

```
% Massen in [kg]
m1=1;
m2=1;

% Federkonstanten in [N/cm]
k10=10;
k12=10;
k20=10;

A=[0 1 0 0; -((k10+k12)/m1) 0 k12/m1 0; 0 0 0 1; k12/m2 0 -((k20+k12)/m2) 0]
B=[0;0;0;0];
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
D=[0;0];
sys=ss(A,B,C,D);
x0=[1;0;1;0]; % Anfangsbedingung x1 und x2 festlegen!
initial(sys,x0)
```

Wir untersuchen nun drei Eigenschwingungen, die wir aus der Praxis kennen:

<u>Nur eine Masse wird ausgelenkt.</u>

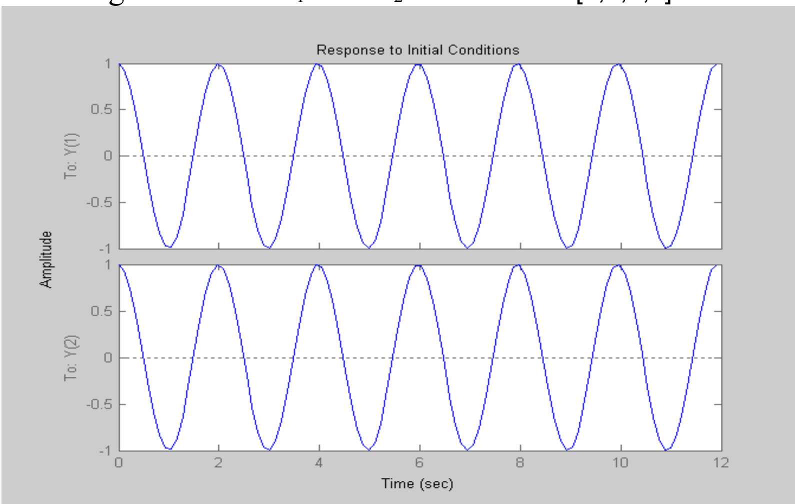
StartbedingungAuslenkung der Masse m_1 um 1cm: x0=[1;0;0;0]



2 Auch hier gilt: D=0.

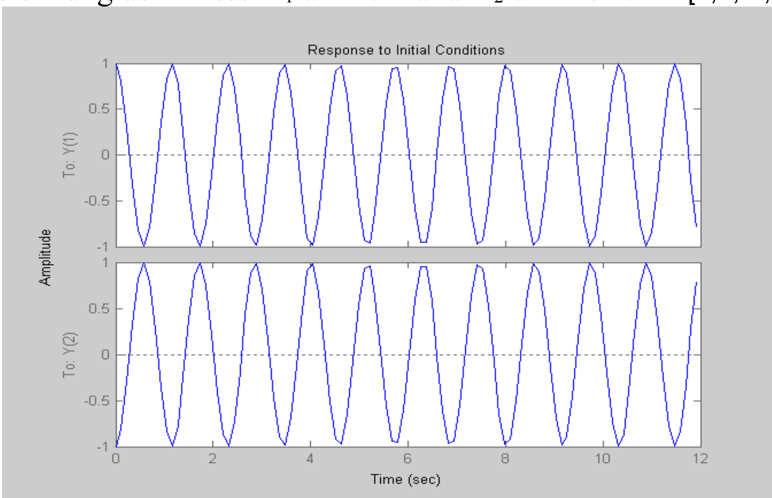
Die beiden Massen schwingen parallel

Startbedingung: Auslenkung der Masse m_1 und m_2 um 1cm: x0=[1;0;1;0]



Die beiden Massen schwingen anti-parallel

Startbedingung: Auslenkung der Masse m_1 um 1cm und m_2 um -1cm: x0=[1;0;-1;0]



Die einzelnen Massen schwingen hier mit doppelter Frequenz!

Aufgabe 4.4

Wir bleiben nun beim gekoppelten Schwingsystem. Das System besitzt folgende Kenngrössen:

Masse der ersten Kugel: $m_1=1kg$

Masse der zweiten Kugel: $m_2=1kg$

Federkonstanten: $k_{12}=1N/m$, $k_{10}=10N/m$, $k_{20}=10N/m$

Abstand der Massen: $L=2m$

Polstellen des Systems

Mit der Funktion pole(sys) können die Polstellen des Systems bestimmt werden. Wir erhalten:

pol =

0 + 3.4557i

0 - 3.4557i

0 + 3.1542i

0 – 3.1542i

Das System besitzt also nur Polstellen auf der imaginären Achse. Ein solches System sollte – gemäss unseren Untersuchungen – weder abklingen noch aufschaukeln, sondern nur oszillieren. Dies ist ja auch der Fall, denn unser ideales Schwingsystem oszilliert bzw. schwingt ewig. (Ein reales Schwingsystem würde natürlich aufgrund der Dämpfung und der Lagerreibungen nach einer Weile abklingen.)

Bedeutung der Eigenvektoren und Eigenwerte

Wir können nun das System wie in Aufgabe 4.3 betrachten. Auf der x-Achse befindet sich die Zeit t in [s] und die y-Achse beschreibt die Lage x_1 bzw. x_2 in [m]. Diese Darstellung beschreibt die einzelnen Auslenkungen x_1 und x_2, missachtet aber den Zusammenhang von x_1 zu x_2. Deshalb wollen wir im folgenden x_1 auf x_2 auftragen. Dazu ändern wir das m-File wie folgt:

```
[Y,T,X]=initial(sys,x0);
plot(Y(:,1:1),Y(:,2:2))
xlabel('x1 in [m]');
ylabel('x2 in [m]');
title('Auslenkung des Systems');
```

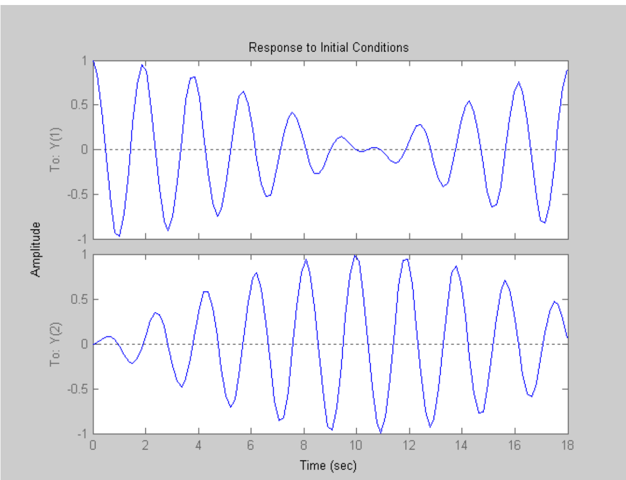
Die folgende Tabelle zeigt sowohl das x_1,x_2-t-Diagramm als auch das x_1-x_2-Diagramm bei drei verschiedenen Startbedingungen:

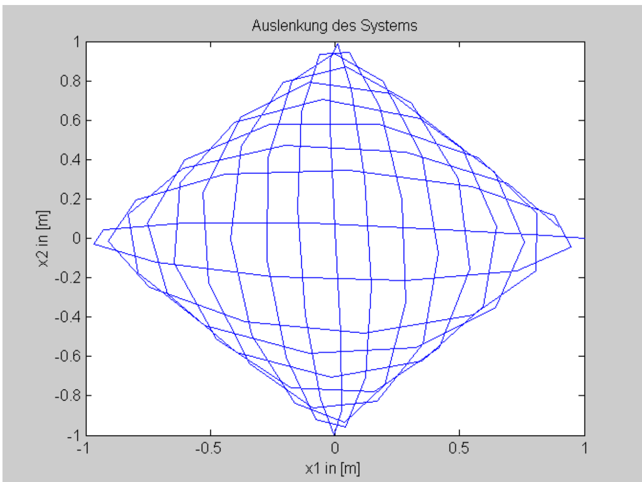
Nur eine Masse wird ausgelenkt. (Fall 1)

Die beiden Massen schwingen parallel. (Fall 2)

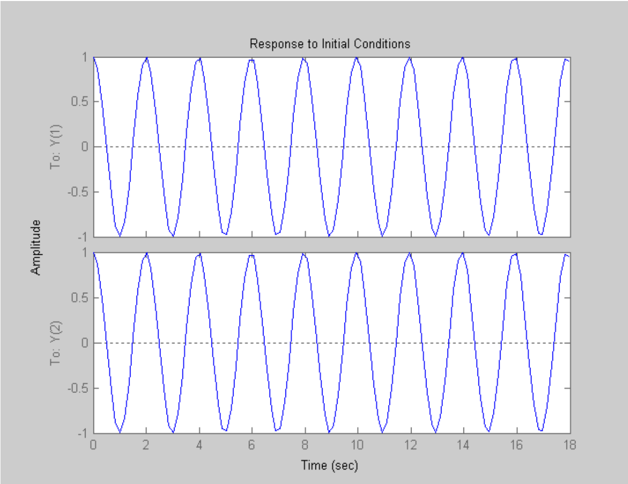
Die beiden Massen schwingen anti-parallel. (Fall 3)

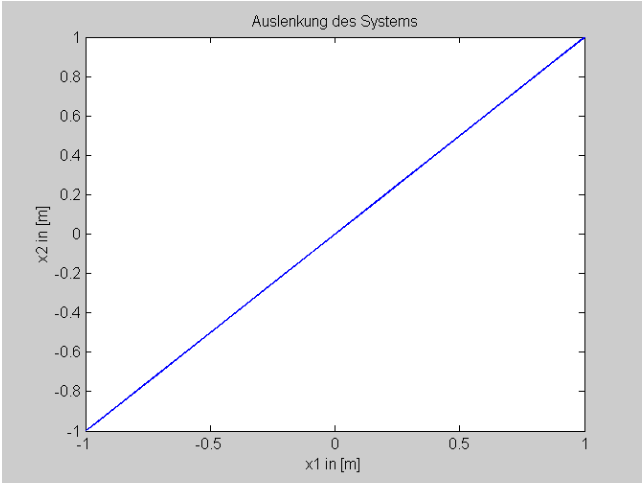
Fall 1: x0=[1;0;0;0]



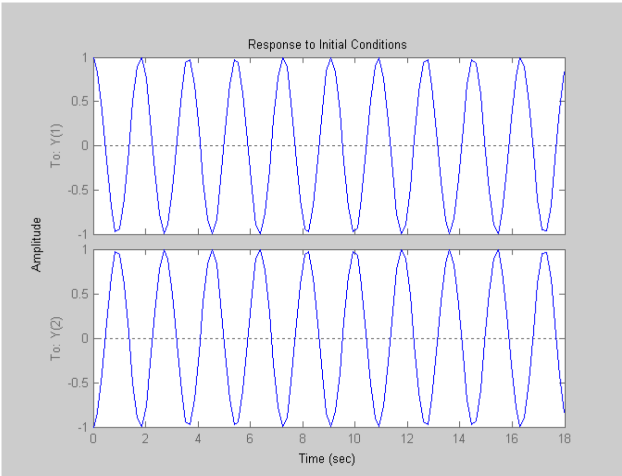


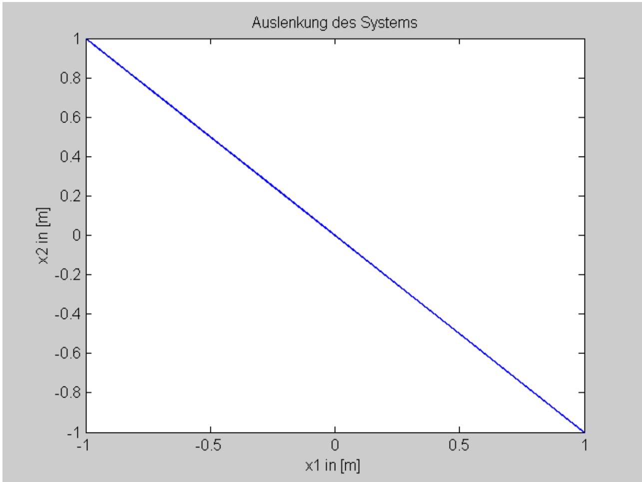
Fall 2: x0=[1;0;1;0]





Fall 3: x0=[1;0;-1;0]





Es wird ersichtlich, dass Fall 2 und 3 die Normalschwingungen des Systems darstellen. Der Fall 1 ist eine lineare Überlagerung (Superposition) der beiden Normalschwingungen.

Nun bestimmen wir die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A und A^2. Wir verändern das m-File folgendermassen:

```
[V1,D1]=eig(A);
[V2,D2]=eig(A*A);
V1
D1
V2
D2
```

Wir erhalten folgende Resultate:

V1 =

0 + 0.1961i	0 - 0.1961i	0 - 0.2132i	0 + 0.2132i
-0.6794	-0.6794	0.6742	0.6742
0 - 0.1961i	0 + 0.1961i	0 - 0.2132	0 + 0.2132i
0.6794	0.6794	0.6742	0.6742

D1 =

0 + 3.4641i	0	0	0
0	0 - 3.4641i	0	0
0	0	0 + 3.1623i	0
0	0	0	0 - 3.1623i

V2 =

0.7071	0	-0.7071	0
0	-0.7071	0	0.7071
-0.7071	0	-0.7071	0
0	0.7071	0	0.7071

D2 =

-12.0000	0	0	0
0	-12.0000	0	0
0	0	-10.0000	0
0	0	0	-10.0000

Die Diagonalelemente D1 entsprechen gerade den Polstellen des Systems. Die Matrix V1 enthält nur komplexe Eigenvektoren. Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A^2 sind reell. Interessant ist nun, dass die Eigenvektoren e_1=[0.7071;0;-0.7071;0] und e_2=[-0.7071;0;-0.7071;0] die Richtungen des Systems im x_1-x_2-Diagramm wiedergeben. Im Fall 1 sind es beide Eigenvektoren. Im Fall 2 beschreibt der Eigenvektor e_1 die Richtung des x_1-x_2-Grafen. Im Fall 3 ist es der Eigenvektor e_2.

Aus physikalischer Sicht ist der Fall 3 interessant. Hier schwingen beide Massen mit der doppelten Frequenz. Dies lässt sich anschaulich nur so erklären, dass die Auslenkungskraft aller Feder maximal beantspurcht wird. Beim Fall 2 bleibt die mittlere Feder unbelastet. Bei Fall 1 wird die Masse m_1 ausgelengt. Diese regt nach einer bestimmten Zeit die Masse m_2 an. Die Masse m_1 klingt ab, während die Masse m_2 aufschaukelt. Der Fall 1 ist ein klassisches Beispiel für einen zyklischen Austauschprozess zwischen Aufschaukeln und Abklingen.

Der Abstand L=1m würde physikalisch gesehen keinen Sinn machen, da die Auslenkung einer Kugel ja auch 1m beträgt!

Aufgabe 4.5

Wir beschäftigen uns nun weiter mit dem gekoppelten Schwinger. Diesemal wird die Symmetrie des Schwingers bewusst gestört: Wir wählen leicht unterschiedliche Massen. Die Kenngrössen des Systems lauten:

Masse der ersten Kugel: $m_1=1.01kg$

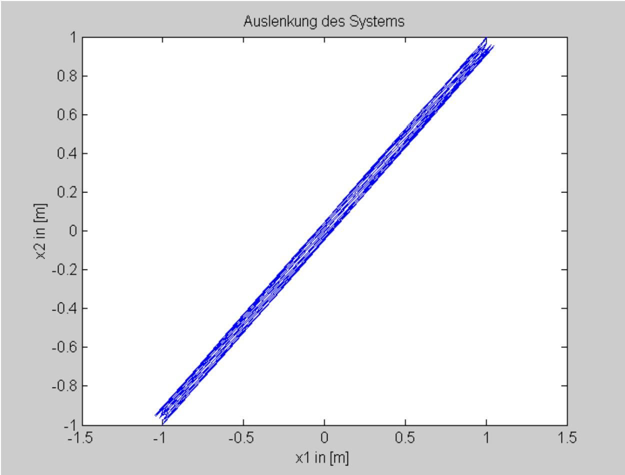
Masse der zweiten Kugel: $m_2=1kg$

Federkonstanten: $k_{12}=1N/m$, $k_{10}=10N/m$, $k_{20}=10N/m$

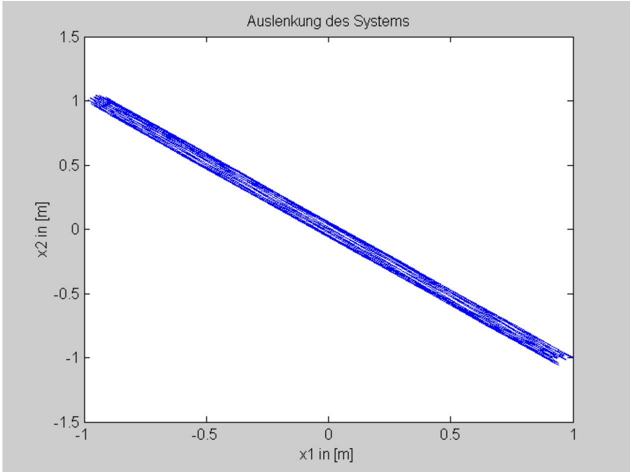
Abstand der Massen: L=2m

Die Darstellung mittels x_1,x_2-t-Diagramm lässt nur wenig erkennen. Das x_1-x_2-Diagramm dagegen veranschaulicht diese kleine Massenänderung. Für die Eigenschwingungen Fall 2 und 3 erhalten wir:

Fall 2: x0=[1;0;1;0]



Fall 3: x0=[1;0;-1;0]



Es ist deutlich sichtbar, dass das System nicht mehr nur die Positionen auf einer Geraden annimmt, wie dies bei Aufgabe 4.4 der Fall war. Das System nimmt auf einem Band fünf verschiedene Positionen ein. Die Dicke des Bandes bestimmt die Störung des Systems. Je dicker das Band, umso grösser ist die Asymmetrie des Systems. In unserem Falle bedeutet dies, dass der Unterschied zwischen den Massen m_1 und m_2 gross ist. Bei der Eingenschwingung Fall 1 ist dieses Verhalten nicht so leicht erkennbar.