Formelsammlung
Signal- und Systemtheorie II

Stephan Senn, D-ITET

Inhaltsverzeichnis

Klassifizierung von Systemen

Gegeben sei ein System S mit dem Eingangssignal u(t) und dem Ausgangssignal y(t). Es gilt:

$$y(t)=S(u(t),t)\Rightarrow y=S(u,t)$$

u und y können auch Vektoren sein.

Linearität

Ein System ist linear wenn gilt:

$$y_1(t)=S(u_1,t)$$

$$y_2(t)=S(u_2,t)$$

$$u(t)=a_1 u_1+a_2 u_2$$

$$y(t)=S(u,t)=S(a_1 u_1+a_2 u_2,t)\overset{!}{=}a_1 S(u_1,t)+a_2 S(u_2,t)=a_1 y_1+a_2 y_2$$

Zeitinvarianz

Ein System ist zeitinvariant wenn gilt:

$$y(t-t_0)=S(u(t-t_0))$$

Kausalität

Ein System ist kausal, wenn das Ausgangssignal nur vom aktuellen Eingangssignal oder von einem Eingangssignal abhängt, das zu einem früheren Zeitpunkt anlag. Ein Ausgangssignal, das von einem zukünftigen Eingangssignal abhängt führt zu einem akausalen System. Solche Systeme können nur mit Speichergliedern realisiert werden.

Für ein kausales System gilt für jeden Zeitpunkt t_0:

$$u(t),\forall t\leq t_0\Rightarrow y(t)=S(u(t),t),\forall t\leq t_0$$

S(u,t) ist unabhängig vom Eingang u(t) für $t > t_0$.

BIBO-Stabilität

BIBO: **B**ounded **I**nput **B**ounded **O**utput

Limitierte Eingangssignale bewirken immer limitierte Ausgangssignale. Es gilt:

$$|u(t)|<M<\infty \qquad \forall t$$

$$|y(t)|<N<\infty \qquad \forall t$$

Wenn ein System stabil ist, dann strebt kein Signal nach unendlich.

Speicherlos versus dynamisch

Wenn das Ausgangssignal nur vom aktuell anliegenden Eingangssignal t_0 abhängt, dann ist das System speicherlos. Im anderen Fall bezeichnet man das System als dynamisch.

speicherlos: $u(t_0)\Rightarrow y(t_0)$

dynamisch: $u(t_1)\Rightarrow y(t_2)$ mit $t_1\neq t_2$

Deterministisch versus stochastisch

Der Verlauf von deterministischen Signalen sind von vornherein bestimmt und bekannt. Stochastische Signale beruhen auf dem Zufallsprinzip und sind, wenn überhaupt, nur mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie vorhersehbar.

Stochastische Signale sind dadurch charakterisiert, dass sie für ein Eingangssignal unterschiedliche Ausgangssignale für wiederholte Durchführungen zeigen. Bei deterministischen Systemen ist dies nicht der Fall. Auch bei wiederholter Durchführung zeigt ein System mit einem Eigangssignal stets das gleiche Ausgangssignal.

deterministisch: $u_1(t)=u_2(t)$ für $t_0<t<\infty$ $\rightarrow$ $y_1(t)=y_2(t)$ für $t_0\leq t$

stochastisch: alles andere!

Realisierbarkeit

Systeme, die sowohl stabil als auch kausal sind, werden als realisierbar bezeichnet.

LTI-Systeme

LTI: **L**inear **T**ime **I**nvariant

Systeme, die sowohl linear als auch zeitinvariant sind, werden LTI-Systeme genannt.

LTI Systeme sind zudem deterministisch, kausal und haben eine bestimmte Dimension.

Autonome Systeme

Ein System, das nur von seinen inneren Zuständen abhängt, bei dem also die Eingangssignale null sind, wird autonom bezeichnet.

Zustandsraumdarstellung bei zeitkontinuierlichen Systemen

Ein System lässt sich durch eine Zustandsfunktion und eine Ausgangsfunktion charakterisieren:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$

$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

Weiter gilt:

$x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^p$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$

Ordnung und Grad eines Systems

- **Ordnung:** Das System ist von der Ordnung n.
- **Grad:** Der Grad eines Systems bezeichnet den Grad des Nennerpolynoms der Übertragungsfunktion. Man beachte, dass dabei die Übertragungsfunktion ungekürzt vorliegt (keine Pol-Nullstellenstreichungen).

SISO - MIMO

SISO: Single Input Single Output
m = 1 und p = 1!

MIMO: Multiple Input Multiple Output
m, p beliebig!

Transformation einer Zustandsvariablen

$$\dot{z} = P\dot{x}$$

$$\{A, B, C, D\} \Rightarrow \{PAP^{-1}, PB, CP^{-1}, D\}$$

Allgemeine Lösung im Zeitbereich

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau \quad \text{mit} \quad x_0 = x(0)$$

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau + Du(t)$$

Siebeigenschaft des Dirac-Stosses

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau-t)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = f(t)$$

Einseitiges Faltungsintegral

$$y(t) = g(t)*u(t) = (g*u)(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad \text{Für} \quad t \geq 0$$

$$\text{mit} \quad g(t) = 0, u(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0$$

Im Laplacebereich gilt:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Allgemeine Lösung im Laplacebereich

$$X(s) = (sI - A)^{-1}(x_0 + BU(s)) \quad \text{mit} \quad x_0 = x(0)$$

$$Y(s) = [C(sI-A)^{-1}B + D]U(s) + C(sI-A)^{-1}x_0$$

Transferfunktion oder Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D$$

G(s) besteht aus einen Nennerpolynom N(s) und einem Zählerpolynom Z(s). Es gilt nun:

$N(s) = 0$: Polstellen des Systems

$Z(s) = 0$: Nullstellen des Systems

<u>Dominante Pole</u>

p_i seien die Polstellen eines Systems. Bei abklingenden Systemen ist immer derjenige Pol dominant, der am nächsten zur Imaginärachse liegt. Allgemein ist der dominante Pol der grösste Pol des Systems.

$$p_{dom} > p_i \qquad \forall i$$

Zusammenschalten von Systemen

- **Parallelschaltung:** $G(s)=G_1(s)+G_2(s)$
- **Serieschaltung:** $G(s)=G_1(s)\cdot G_2(s)$

Transitionsmatrix

$x(t_0+t)=\phi(t)x(t_0)$ mit der Transitionsmatrix $\phi(t)$

$\phi(t)=e^{Ft}=\mathscr{L}^{-1}\{(sI-F)^{-1}\}$

Anfangswerttheorem (Initial Value Theorem)

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Endwerttheorem (Final Value Theorem)

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

Merke: Das Ausgangssignal eines stabilen Systems nimmt nach langer Zeit das Verhalten des Eingangssignal an.

Laplacebereich – Frequenzbereich

Es gilt:

$g(t)=0$ für $t<0$

Für die Fouriertransformation des Systems g(t) gilt:

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} g(t)\cdot e^{-j\omega t}dt$$

Für die Laplacetransformation des Systems g(t) gilt:

$$G(s)=\int_{0}^{+\infty} g(t)\cdot e^{-st}dt$$

Daraus folgt:

$$F(j\omega)=G(s=j\omega)$$

Zustandsraumdarstellung bei zeitdiskreten Systemen

Die zeitkontinuierliche Zustandsraumdarstellung lautet:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Das zeitkontinuierliche System G(s) wird diskretisiert. Dabei gilt für das zeitdiskrete System G(z):

G(z):

Im diskretisierten Zustandsraum gilt dann:

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ mit der Abkürzung $f(kT) = f(k)$

$y(k) = Cx(k) + Du(k)$

Dabei gilt:

$A = e^{FT}$ mit der Abtastzeit T

$$B = \int_0^T e^{F\tau} G \, d\tau$$

Wie berechnet man die Matrix e^{FT} am besten?

- Berechnung mit Hilfe der inversen Laplacetransformation:

  $e^{FT} = \mathscr{L}^{-1}\{(sI - F)^{-1}\}$ mit $t = T$

- Berechnung mit Hilfe von Eigenvektoren und Eigenwerten:

  $e^{FT} = Qe^{DT}Q^{-1}$ mit $F = QDQ^{-1}$

Transformation einer Zustandsvariablen

$$x = \Pi \cdot z$$

$$\{F, G, C, D\} \Rightarrow \{\Pi^{-1} F \Pi, \Pi^{-1} G, C\Pi, D\}$$

$$\{A, B, C, D\} \Rightarrow \{\Pi^{-1} A \Pi = e^{\Pi^{-1} F \Pi T} = e^{F_z T}, \Pi^{-1} B, C\Pi, D\}$$

Allgemeine Lösung im diskreten Zeitbereich

Das Eingangssignal u(t) wird mit der Periode T abgetastet. Im Intervall $kT \leq t < (k+1)T$ wird der Wert des abgetasteten Signals konstant gehalten. Es entsteht eine Treppenkurve. Weiter gilt dann:

$$x(t) = e^{F(t-kT)} x(kT) + u(kT) \int_{kT}^{t} e^{F(t-\tau)} G \, d\tau$$

Mit $t = (k+1)T$ und der Substitution $v = kT + T - \tau$ erhält man:

$$x(k+1) = e^{FT} x(k) + u(k) \int_0^T e^{Fv} G \, dv$$

$$y(k) = CA^k x_0 + \sum_{i=1}^{k} CA^{i-1} Bu(k-i) + Du(k) \quad \text{mit} \quad x_0 = x(0)$$

Allgemeine Lösung im Z-Bereich (Z-Transformation)

$$X(z)=(zI-A)^{-1}BU(z)+z(zI-A)^{-1}x_0 \qquad \text{mit} \quad x_0=x(0)$$

$$Y(z)=[C(zI-A)^{-1}B+D]U(z)+Cz(zI-A)^{-1}x_0$$

Transferfunktion oder Übertragungsfunktion

$$G(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$$

Anfangswerttheorem (Initial Value Theorem)

$$\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{z\to\infty} F(z)$$

Endwerttheorem (Final Value Theorem)

$$\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

Merke: Das Ausgangssignal eines stabilen Systems nimmt nach langer Zeit das Verhalten des Eingangssignal an.

Laplacebereich – Z-Bereich

Die Transformationsregel lautet:

$$G(z)=Z\{\mathscr{L}^{-1}\{P(s)\}, t=Tk\}=\zeta\{P(s)\}$$

Man beachte, dass die Transformation nur in diese Richtung eindeutig ist.

Für die Übertragungsfunktionen im Laplace- und Z-Bereich gilt mit Hilfe eines Halteglieds:

$$G(z)=(1-z^{-1})\cdot\zeta\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Weitere direkte Transformationen zwischen Laplace- und Z-Bereich sind den Transformationstabellen zu entnehmen.

Bodeplot

Gegeben sei die Übertragungsfunktion G(jω).

Amplitudendiagramm

x-Achse: $\log(\omega)$

y-Achse: $20\log|G(j\omega)|$ Amplitude in dB

<u>Vorgehen</u>

1. Übertragungsfunktion auf folgende Form bringen:

$$G(j\omega)=K(j\omega)^N\frac{(1\pm j\omega\tau_1)\cdot(1\pm j\omega\tau_2)\cdot\ldots}{(1\pm j\omega\tau_a)\cdot(1\pm j\omega\tau_b)\cdot\ldots}$$

2. Eigenschaften des Logarithmus ausnutzen:

$$\log(G(j\omega)) = \log(K) + N \cdot \log(j\omega) + (\log(1 \pm j\omega\tau_1) + ...) - (\log(1 \pm j\omega\tau_a) + ...)$$

Durch Superposition der einzelnen Logarithmen bzw. der Amplituden der einzelnen Übertragungsfunktionen lässt sich das Amplitudendiagramm zeichnen.

Tipps

- $G(j\omega) = 1 \pm j\omega\tau$
  Diese Übertragungsfunktion hat einen Knick bei der Frequenz $\omega = 1/\tau$. Die Amplitude ist 0dB bis zur Knickfrequenz. Ab der Knickfrequenz steigt die Amplitude linear mit 20dB pro Dekade an.
- $G(j\omega) = j\omega\tau$
  Diese Übertragungsfunktion ist eine Gerade mit der Steigung 20dB pro Dekade durch den x-Achsenabschnitt ω=1rad/s.

Phasendiagramm

x-Achse: $\log(\omega)$

y-Achse: $arg\{G(j\omega)\}$ Winkel in Grad

Vorgehen

1. Übertragungsfunktion auf folgende Form bringen:

$$G(j\omega) = K(j\omega)^N \frac{(1 \pm j\omega\tau_1) \cdot (1 \pm j\omega\tau_2) \cdot ...}{(1 \pm j\omega\tau_a) \cdot (1 \pm j\omega\tau_b) \cdot ...}$$

2. Den Winkel der einzelnen Übertragungsfunktionen berechnen:

$$arg\{G(j\omega)\} = (\arctan(\pm\omega\tau_1) + \arctan(\pm\omega\tau_2) + ...) - (\arctan(\pm\omega\tau_a) + \arctan(\pm\omega\tau_b) + ...) + ...$$

$$... \arctan(90° \cdot N) \pm 90°(1 - sign(K))$$

Durch Superposition der einzelnen Arkustangens bzw. der Argumente der einzelnen Übertragungsfunktionen lässt sich das Phasendiagramm zeichnen.

Tipps

- $arg\{G(j\omega)\} = \arctan(\omega\tau)$

  Das Argument dieser Übertragungsfunktion hat einen s-förmigen Verlauf von 0° bis 90°. Man spricht auch vom Drehen von 0° auf 90°. Approximiert wird diese Funktion mit Hilfe einer Geraden, dessen Mittelpunkt die Knickfrequenz bei $\omega = 1/\tau$ darstellt. Die Gerade wird so durch die Knickfrequenz gelegt, dass sie durch zwei Dekaden begrenzt wird.

Nyquistplot

Gegeben sei die Übertragungsfunktion G(jω).

x-Achse: $\Re\{G(j\omega)\}$ mit $\omega = (-\infty, +\infty)$

y-Achse: $\Im\{G(j\omega)\}$

Tipps

- Nur den Teil $\omega=(0,+\infty)$ betrachten. Anschliessend das Resultat an der x-Achse spiegeln.
- Einfache Zahlenwerte für ω einsetzen und Abbildungspunkte bestimmen. Anschliessend die ermittelten Punkte durch eine Kurve verbinden.

Einteilung der Stabilität

- Eingang-Ausgang-Stabilität: **BIBO-Stabilität**
- Zustandsraumstabilität: **Lyapunov-Stabilität**
- Stabilität bei Rückkopplungen: **Vereinfachtes Nyquist-Kriterium**

Stabilität bei zeitkontinuierlichen Systemen

BIBO-Stabilität

Ein zeitkontinuierliches System ist BIBO-stabil wenn gilt:

Limitierte Eingangssignale bewirken immer limitierte Ausgangssignale.

$$|u(t)|<M<\infty \qquad \forall t$$

$$|y(t)|<N<\infty \qquad \forall t$$

Allgemein gilt:

Alle Polstellen der Übertragungsfunktion eines BIBO-stabilen Systems liegen in der linken Halbebene.

$$\Re\{s_i\}<0 \quad \text{mit} \quad s_i\in\mathbb{C}$$

Ein endlich dimensionales LTI-System ist BIBO-stabil, wenn gilt:

- Die Impulsantwort strebt für $t\to\infty$ gegen null.

  $$\lim_{t\to\infty} h(t)=0$$

- Alle Polstellen liegen in der linken Halbebene.

Interne Stabilität eines Systems

Ein System ist intern stabil, wenn gilt:

Alle Eigenwerte der Systemmatrix liegen in der linken Halbebene.

$$\Re\{\lambda_i\}<0 \qquad \mathit{mit} \quad \lambda_i\in\mathbb{C}$$

Die interne Stabilität darf nicht mit der BIBO-Stabilität verwechselt werden. Durch Pol-Nullstellenkürzungen kann ein System, das von sich aus instabil ist, stabil werden, indem ein positiver Pol herausfällt. Ein solches System wird dann BIBO-stabil bezeichnet. Es ist aber als solches instabil, da die Systemmatrix einen Eigenwert in der rechten Halbebene aufweist. Die interne Stabilität trägt diesem Phänomen Rechnung.

Lyapunov-Stabilität

Ein System ist Lyapunov-stabil, wenn für eine beliebige positiv definite symmetrische Matrix Q die Matrix P auch positiv definit und symmetrisch ist:

$$A^T P + PA = -Q \quad .$$

Die Lyapunov-Funktion v(x) misst den Abstand des Vektors x zum Ursprung. v(x) erfüllt folgende Eigenschaften:

- $v(x=0)=0$ und $v(x\neq 0)>0$
- $\lim_{x\to\infty} v(|x|)=\infty$ und $\lim_{x\to m} v(|x|)<\infty$ mit $m\in\mathbb{R}$
- $\frac{\partial v(x)}{\partial x}=c$ mit $c\in\mathbb{R}$ und $x\neq 0$

Die Ableitung von v(x) nach der Zeit t ist immer dann negativ, wenn das System in x abklingt. Für instabile Systeme ist die Ableitung im Punkt x positiv.

Wann ist eine Matrix positiv definit?

Nacheinander die Determinante der Untermatrizen der Matrix P bestimmen.

$$p_{11}>0 \quad , \quad p_{11}p_{22}-p_{12}^2>0 \quad \text{, usw.}$$

Tipp

Für Q kann die Einheitsmatrix gewählt werden.

Vereinfachtes Nyquist-Kriterium

Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion einer Rückkopplung:

$$G(s)=\frac{F(s)}{1+F(s)}$$

Wenn F(s) im Nquistplot den Punkt $s=-1$ nicht umkreist, dann ist das System stabil; andernfalls ist es instabil.

Stabilität bei zeitdiskreten Systemen

Lyapunov-Stabilität

Ein zeitdiskretes System ist Lyapunov-stabil, wenn für eine beliebige positiv definite symmetrische Matrix Q die Matrix P auch positiv definit und symmetrisch ist:

$$A^T PA - P = -Q \quad .$$

Wann ist eine Matrix positiv definit?

Nacheinander die Determinante der Untermatrizen der Matrix P bestimmen.

$$p_{11}>0 \quad , \quad p_{11}p_{22}-p_{12}^2>0 \quad \text{, usw.}$$

Tipp

Für Q kann die Einheitsmatrix gewählt werden.

Asymptotische Stabilität

Ein zeitdiskretes System ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix A im Einheitskreis liegen:

$$|\lambda_i| < 1$$

BIBO-Stabilität

Ein lineares zeitdiskretes System mit einer echt rationalen Übertragungsfunktion G(z) ist BIBO-stabil, wenn alle Polstellen von G(z) im Einheitskreis liegen (siehe asymptotische Stabilität!).

Zusammenhang zwischen Lyapunov-Stabilität und BIBO-Stabilität

Das System ist Lyapunov-stabil.	→	Das System ist BIBO-stabil.
Das System ist Lyapunov-stabil.	←	Das System ist BIBO-stabil und der Zustandsraum ist kontrollierbar und beobachtbar.

Erreichbarkeit, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Alle hier behandelten Themen gelten für zeitdiskrete als auch für zeitkontinuierliche Systeme.

Erreichbarkeit (Reachability)

Ein System ist erreichbar, wenn ein Eingangssignal exisitiert, sodass jeder Zustand des Systems vom Ursprungszustand (x(0) = 0) aus erreicht werden kann.

Die Kalman Steuerbarkeitsmatrix lautet:

$$C = [B, AB, A^2 B, \ldots, A^{n-1} B]$$

Ein System ist vollkommen erreichbar, wenn die Matrix C vollen Rang hat.

Der Bildbereich von C beschreibt das erreichbare Teilsystem.

Zerlegung des Systems

Jedes nicht-erreichbare System kann in einen erreichbaren und in einen nicht-erreichbaren Teil zerlegt werden:

$$A_{new} = \begin{bmatrix} A_e & A_k \\ 0 & A_{ne} \end{bmatrix} \quad , \quad B_{new} = \begin{bmatrix} B_e \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \quad A_{new} = \Pi^{-1} A \Pi \quad , \quad B_{new} = \Pi^{-1} B$$

$$Rang(C) = i < n$$

Das Teilsystem (A_e, B_e) ist erreichbar mit Rang i.

<u>Tipp</u>

Die Transformationsmatrix Π muss regulär sein. Man betrachtet am besten die Matrix C und entimmt ihr Spalte für Spalte und testet gleichzeitig, ob die Spalten unabhängig sind. So geht man Schritt für Schritt durch und wählt am Schluss eine beliebige Spalte, sodass die Transformationsmatrix regulär ist.

Steuerbarkeit (Controllability)

Ein System ist steuerbar, wenn ein Eingangssignal exisitiert, sodass jeder Zustand des Systems in den Ursprungszustand (x(0) = 0)überführt werden kann.

Ein System ist steuerbar, wenn es erreichbar ist oder wenn alle Eigenwerte des nicht-erreichbaren Teilsystems null sind.

Steuerbarkeit und Erreichbarkeit sind äquivalente Konzepte im zeitkontinuierlichen Fall.

Beobachtbarkeit (Observability)

Ein Zustand des Systems ist beobachtbar, wenn er als Ausgangssignal anliegt. Umgekehrt ein Zustand des Systems bei dem für ein beliebiges Zeitintervall kein Ausgangssignal anliegt, ist nicht beobachtbar. Für einen nicht-beobachtbaren Zustand gilt:

Der Zustand $x(0)=x_0$ *sei nicht beobachtbar.*

Das Eingangssignal $u(t)=0$ *sei null für* $t\geq 0$.

Für das Ausgangssignal gilt dann: $y(t)=0$ *für* $t\geq 0$.

Die Beobachtbarkeitsmatrix O lautet:

$$O=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ein System ist vollkommen beobachtbar, wenn die Matrix O vollen Rang hat.

Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit sind duale Konzepte.

Zerlegung des Systems

Jedes nicht-beobachtbare System kann in einen beobachtbaren und in einen nicht-beobachtbaren Teil zerlegt werden:

$$A_{new}=\begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ A_k & A_{no} \end{bmatrix} \quad , \quad C_{new}=[C_o, 0] \qquad \text{mit} \quad A_{new}=\Pi^{-1} A \Pi \quad , \quad C_{new}=C\Pi$$

$$Rang(C)=i<n$$

Das Teilsystem (A_o, C_o) ist beobachtbar mit Rang i.

<u>Tipp</u>

Die Transformationsmatrix Π muss regulär sein. Man betrachtet am besten die Matrix O und entimmt ihr Zeile für Zeile und testet gleichzeitig, ob die Zeilen unabhängig sind. So geht man Schritt für Schritt durch und wählt am Schluss eine beliebige Zeile, sodass die Transformationsmatrix regulär ist.

Rekonstruierbarkeit (Reconstructability)

Alle Eigenwerte eines nicht-beobachtbaren Systems sind null.

Detektierbarkeit (Detectability)

Ein nicht-beobachtbares System ist stabil.

Minimale Realisierung (Minimal Realization)

Eine minimale Realisierung liegt dann vor wenn gilt:

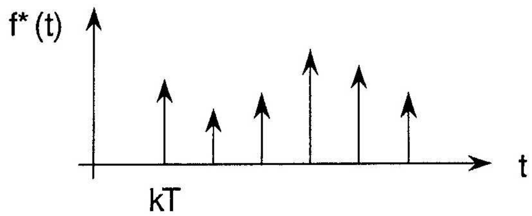
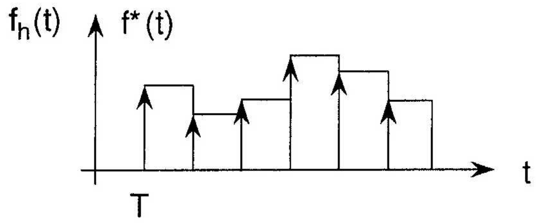
- Das System ist steuerbar und beobachtbar.
- Es gibt keine Auslöschung von Pol- und Nullstellen.

Abtastung – Diskretisierung eines Signals

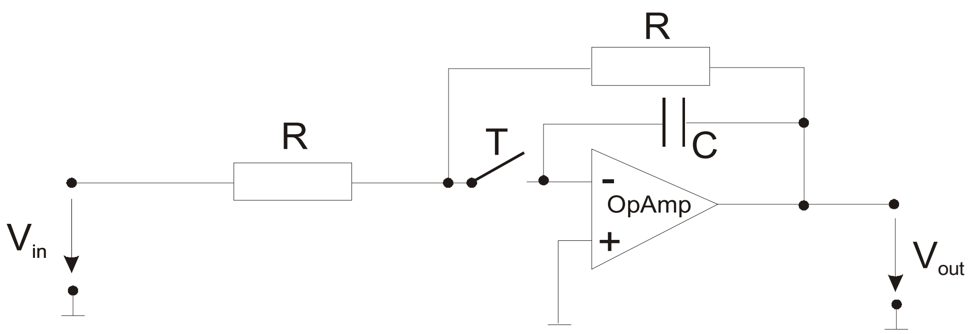
Vorgang

Das Eingangssignal wird zuerst mit einem Tiefpassfilter begrenzt. Dieses bandbegrenzte Signal wird nun abgetastet und für eine Zeitspanne T gehalten. Dabei entstehen Kopien im Spektrum des abgetasteten Signals, die bei der Rekonstruktion mit Hilfe eines Tiefpassfilters herausgefiltert werden müssen. Bei zeit- und wertdiskreten Realisierungen wird das abgetastete Eingangssignal noch zusätzlich quantisiert und so einem digitalen Wert zugeordnet.

Die folgende Tabelle zeigt den mathematischen Sachverhalt der Diskretisierung eines bandbegrenzten Eingangssignals:

1. Abtastung des Eingangssignals 	$f_{sam}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\, f(t)$ $f_{sam}(t)$ entspricht $f^*(t)$.
2. Faltung mit dem Halteglied erster Ordnung 	$g_h(t)=\sigma(t)-\sigma(t-T) \quad \circ\!-\!\bullet$ $G_h(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}$ (LT) $G_h(j\omega)=\frac{(1-e^{-j\omega T})\cdot(1+j\omega\pi\delta(\omega))}{j\omega}$ (FT) $f_h(t)=f_{sam}(t)*g_h(t) \quad \circ\!-\!\bullet$ $F_h(s)=F_{sam}(s)\cdot G_h(s)$ (LT) $F_h(j\omega)=F_{sam}(j\omega)\cdot G_h(j\omega)$ (FT)
3. Tiefpassfilter anwenden Dieser Vorgang findet erst bei der Rekonstruktion des Signals statt und dient der Elimination der Kopien im Spektrum des abgeasteten Signals.	$LP(j\omega)=\sigma(\omega)-\sigma(\omega-\omega_c) \quad \circ\!-\!\bullet$ $lp(t)=\frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$ $F_e(j\omega)=F_h(j\omega)\cdot LP(j\omega)$

Eine mögliche technische Realisierung eines A/D-Wandlers sieht wie folgt aus:



Abtasttheorie von Shannon

Für verzerrungsfreie Rekonstruktion muss gelten:

$$f_s \geq 2 f_g$$

Die Abtastfrequenz f_s muss grösser sein als zweimal die höchste im Originalsignal vorkommende Frequenz f_g. Die kritische Abtastfrequenz $f_s = 2 f_g$ wird auch als Nyquistrate bezeichnet.

D/A-Wandlung

Das digitale Signal wird über einen Tiefpassfilter ausgegeben.

Die Z-Transformation

f(k) ⊶ F(z)

$$F(z) = Z\{f(k)\}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k} \qquad \text{mit} \quad f(k) = 0 \quad \text{für} \quad k < 0$$

Rücktransformation oder inverse Z-Transformation

$$f(k) = Z^{-1}\{F(z)\}$$

Methode 1: Spezielle Taylorreihe bilden

Man entwickelt F(1/z) in eine Taylorreihe um z=0. Es gilt:

$$f(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} F\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{bei} \quad z = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Methode 2: Polynomdivision

Man führt eine Polynomdivision durch und erhält damit direkt die gesuchten Koeffizienten. Es gilt:

$$F(z) = a_1 + a_2 \cdot z^{-1} + a_3 \cdot z^{-2} + a_4 \cdot z^{-3} + \ldots \rightarrow f(k) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}$$

Methode 3: Partialbruchzerlegung

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung wird F(z) in Ausdrücke G(z) mit der folgenden Gestalt zerlegt:

$$G(z)=\frac{1}{1+\frac{q}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{z}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{\infty} g(k)\cdot z^{-k} \quad \text{mit} \quad g(k)=q^{k} \quad \text{für} \quad \left|\frac{q}{z}\right|<1$$

Die Ausdrücke G(z) lassen sich dann bequem nach g(k) transformieren. Das Resultat kann dann noch zusammengefasst werden. Der Vorteil dieser Methode besteht in der Angabe einer geschlossenen Form für f(k), was bei anderen Methoden nicht möglich ist.

Rechenregeln

- Erster Verschiebungssatz: $Z\{f(k-m)\}=z^{-m}F(z)$
- Zweiter Verschiebungssatz: $Z\{f(k+m)\}=z^{m}\left(F(z)-\sum_{i=0}^{m-1} f(i)\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^{i}\right)$
- Grenzwertsatz: $f(0)=\lim_{z\to\infty} F(z)$, $\lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1+0}(1-z)F(z)$
- Differentiation: $Z\{k\cdot f(k)\}=-z\frac{dF(z)}{dz}$
- Integration: $Z\left\{\frac{f(k)}{k}\right\}=\int_{z}^{\infty}\frac{F(u)}{u}du$
- Faltung: $f(k)*g(k)=\sum_{i=0}^{k} f(i)g(k-i)$, $Z\{f(k)*g(k)\}=F(z)G(z)$

Nicht-lineare Systeme

Linearisierung

Ein nicht-lineares System wird mit Hilfe der Taylorreihe approximiert. Es gilt:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}\cdot(x-x_0)\nabla f(x_0)+\frac{1}{2!}\cdot[(x-x_0)\nabla]^2 f(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot[(x-x_0)\nabla]^n f(x_0)$$

$$x\in\mathbb{R}^k$$

Man beachte, dass x ein Spaltenvektor darstellt.

Für die Linearisierung gilt:

$$\tilde{f}(x)=f(x_0)+(x-x_0)\nabla f(x_0)$$

Will man nun das System linearisieren, so müssen zuerst die Funktionen f(x) aufgestellt werden. Anschliessend müssen alle f(x) linearisiert werden. Man beachte, dass auch die Eingänge u linearisiert werden müssen, sofern sie nicht-linear sind.

Stabilitätsbetrachtungen

Man wählt einen geeigneten Lyapunov-Funktionskandidaten und prüft, ob das System in einem bestimmten Punkt abklingt. Man geht also wie folgt vor:

- Lyapunov-Funktionskandidat wählen: z.B. $v(x)=x_1^2+x_2^2$
- v(x) nach der Zeit t ableiten: z.B. $\dot{v}(x)=2\cdot x_1\cdot\dot{x}_1+2\cdot x_2\cdot\dot{x}_2$
- Zustandsgleichungen in v(x) einsetzen: $\dot{x}_1,\dot{x}_2\rightarrow v(x)$
- Ausgezeichneter Koordinatenpunkt x (z.B. Ruhelage) einsetzen und prüfen ob $v(x)\leq 0$ ist.

Ruhelage

Ein nicht-lineares System kann mehrere Ruhelagen aufweisen. Ein System ist in Ruhe, wenn gilt:

$$\dot{x}_1=0,\dot{x}_2=0,\ldots,\dot{x}_n=0$$

Anhang

Matrixexponentialschreibweise

$$e^{At}=\sum_{i=0}^{\infty}A^i\cdot\frac{t^i}{i!}$$ mit der Matrix A

$$A^0=I$$ mit der Einheitsmatrix I

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$e^{A(a+b)}=e^{Aa}\cdot e^{Ab}$$ mit $a,b\in\mathbb{R}$

$$e^{At}\cdot e^{-At}=I$$

$$\frac{d}{dt}e^{At}=e^{At}\cdot A \qquad A\int_0^t e^{A\tau}d\tau=e^{At}-I$$

$$e^{At}=Te^{Dt}T^{-1}$$ mit $A=TDT^{-1}$

Die Matrix D ist diagonal mit den Eigenwerten von A als Diagonalelemente.

Die Matrix $e^{D\cdot t}$ ist ebenfalls diagonal mit den Diagonalelementen $e^{\lambda_i\cdot t}$.

$$e^{At}=Te^{Dt}T^T$$ mit $A=TDT^T$

Die Matrix A ist orthogonal. Die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix können so gewählt werden, dass die Matrix orthogonal wird.

Inverse einer zweidimensionalen Matrix

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

Minimalphasiges System

Ein minimalphasiges System hat keine Nullstellen in der rechten Halbebene. Ein nicht-minmalphasiges System weist mindestens eine Nullstelle in der rechten Halbebene auf.

Transientes Verhalten

Das Abklingen eines Systems wird auch als transientes Verhalten bezeichnet.

Quellenangaben

Diese Zusammenstellung basiert im wesentlichen auf dem Vorlesungsskript 'Signal- und Systemtheorie II' von Kottmann, Kraus, Parrilo und Schaufelberger.