

Formelsammlung

Signal- und Systemtheorie I

von Stephan Senn, D-ITET

Inhaltsverzeichnis

Einteilung der Transformationen.....	3
Zeitkontinuierliche Transformationen.....	3
Zeitdiskrete Transformationen.....	3
Diskrete Transformationen.....	3
Alle Transformationen im Überblick.....	3
Zeitkontinuierliche Fouriertransformation.....	3
Zweiseitige Laplacetransformation.....	3
Zeitdiskrete Fouriertransformation.....	3
Zweiseitige Z-Transformation.....	4
Konvergenzgebiete.....	4
Laplacetransformation.....	4
Z-Transformation.....	5
Systemeigenschaften.....	5
Linearität.....	5
Zeitinvarianz.....	5
BIBO-Stabilität (Bounded Input Bounded Output stability).....	6
Kausalität.....	6
Realisierbarkeit.....	6
LTI-Systeme (Linear Time Invariant Systems).....	6
Gedächtnis.....	6
Invertierbarkeit.....	6
Einteilung der Signale.....	7
Fourier-Reihen.....	7
Analyse.....	7
Synthese.....	7
Abtastung.....	7
Faltung.....	8
Zeitkontinuierliche Faltung.....	8
Zeitdiskrete Faltung.....	8
Eigenschaften der Faltung.....	8
Graphische Deutung.....	8
Graphische Faltung.....	8
Mathematische Methoden.....	10
Reelle Partialbruchzerlegung.....	10
Komplexe Partialbruchzerlegung.....	10
Residuensatz.....	10
Kunstgriffe.....	12
Systemdifferenzgleichungen.....	12
Zeichenregel für Funktionen.....	13
Faltung und Funktionsargumente.....	14
Gerader und ungerader Anteil einer Funktion bestimmen.....	14
Sprungfunktion und Deltaimpuls (Diracstoss).....	15
Faltung zweier Rechteckfunktionen: Dreiecksfunktion.....	15

Transformationstabellen und wichtige Beziehungen..... 16
Quellenangaben..... 16

Einteilung der Transformationen

Zeitkontinuierliche Transformationen

Zeitbereich: kontinuierlich

Frequenzbereich: kontinuierlich

Vertreter: zeitkontinuierliche Fouriertransformation, zeitkontinuierliche Laplacetransformation

Zeitdiskrete Transformationen

Zeitbereich: diskret

Frequenzbereich: kontinuierlich

Vertreter: zeitdiskrete Fouriertransformation, Z-Transformation

Diskrete Transformationen

Zeitbereich: diskret

Frequenzbereich: diskret

Vertreter: Diskrete Fouriertransformation

Alle Transformationen im Überblick

Man beachte, dass hier die zweiseitigen Transformationen $(-\infty, +\infty)$ verwendet werden.

Zeitkontinuierliche Fouriertransformation

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} dt = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\}$$

Zweiseitige Laplacetransformation

$$s = \sigma + j\omega \quad s \in \mathbb{C}$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Bezug zur zeitkontinuierlichen Fouriertransformation:

$$F(s) = F(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{f(t) \cdot e^{-\sigma t}\}$$

Zeitdiskrete Fouriertransformation

Wird die zeitkontinuierliche Fouriertransformation mit $t = kT$ abgetastet, so erhält man:

$$F(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \cdot e^{-jn\theta} = T\{f[n]\} \quad F[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\theta}) \cdot e^{jn\theta} d\theta = T^{-1}\{F(e^{j\theta})\}$$

$$\omega T = \theta$$

Zweiseitige Z-Transformation

$$z \in \mathbb{C}$$

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] \cdot z^{-n} = Z\{x[n]\} \quad f[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) \cdot z^{n-1} dz = Z^{-1}\{F(z)\}$$

Bezug zur zeitdiskreten Z-Transformation:

$$F(z) = F(r \cdot e^{j\theta}) = F(e^{j\theta}) \quad \text{mit } r=1$$

Konvergenzgebiete

Laplace-Transformation

Man zerlegt die Laplace-Transformation wie folgt:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) \cdot e^{-st} dt$$

Damit nun das Laplaceintegral existiert, muss die Exponentialfunktion abklingen. Es muss nun für den Exponenten von e eine Bedingung formuliert werden, sodass das Integral existiert bzw. abklingt. Dies ist nicht immer möglich. Zudem muss die Funktion f(t) langsamer ansteigen als die Exponentialfunktion abfällt, was im allgemeinen Fall fast immer der Fall ist. Man erhält also zwei Bedingungen für das Konvergenzgebiet:

$$\int_0^{+\infty} \tilde{f}(t) \cdot e^{-b(s)t} dt \rightarrow b(s) > 0 \quad (\text{Fall 1})$$
$$\int_{-\infty}^0 \tilde{f}(t) \cdot e^{-b(s)t} dt \rightarrow b(s) < 0 \quad (\text{Fall 2})$$

Die Schnittmenge der beiden Bedingungen in Fall 1 und 2 ergibt den Konvergenzbereich.

Weiter gilt:

- Die Fourier-Transformation $G(j\omega)$ einer Funktion $g(t)$ existiert dann, wenn die imaginäre Achse im Konvergenzgebiet der Laplace-Transformation $G(s)$ ist.
- Das Konvergenzgebiet der Übertragungsfunktion eines kausalen LTI-Systems ist eine rechte Halbebene.
- Für Systeme mit rationalem $H(s)$ ist die Kausalität des Systems äquivalent zu der Bedingung, dass das Konvergenzgebiet die rechte Halbebene jenseits des am weitesten rechts liegenden Poles ist.
- Ein kausales LTI-System mit rationalem $H(s)$ ist stabil dann und nur dann, wenn alle Pole von $H(s)$ in der linken Halbebene der s-Ebene liegen, d.h., alle Pole haben negativen Realteil.

Z-Transformation

Man zerlegt die Z-Transformation wie folgt:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} - \sum_{n=-1}^{-\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} = \frac{z}{z-\alpha}$$

Für die Konvergenz ist nur der Radius der komplexen Zahl z von Bedeutung. Daher gilt:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} \rightarrow |z| > |\alpha| \quad (\text{Fall 1})$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} \rightarrow |z| < |\alpha| \quad (\text{Fall 2})$$

Für die Konvergenz betrachtet man also Kreise mit dem Radius $|\alpha|$. Im Fall 1 ist das Konvergenzgebiet ausserhalb des Kreises. Im Fall 2 ist das Innere des Kreises das Konvergenzgebiet.

Meistens besteht die Übertragungsfunktion $G(z)$ aus mehreren Polstellen. Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung gelingt es nun, die Übertragungsfunktion auf folgende Form zu bringen:

$$G(z) = G_1(z) + G_2(z) + \dots + G_n(z) = a_1 \cdot \frac{z}{z-\alpha_1} + a_2 \cdot \frac{z}{z-\alpha_2} + \dots + a_n \cdot \frac{z}{z-\alpha_n}$$

Damit kann man den Konvergenzbereich als Schnittbereich aller Teilfunktionen von $G(z)$ auffassen:

$$\text{CONV}\{G(z)\} = \text{CONV}\{G_1(z)\} \cap \text{CONV}\{G_2(z)\} \cap \dots \cap \text{CONV}\{G_n(z)\}$$

Weiter gilt:

- **Kausalität bedingt, dass die Impulsantwort $h[n]$ eines Systems rechtsseitig ist. Das Konvergenzgebiet von $H(z)$ ist ausserhalb des Poles mit dem grössten Betrag.**
- **Stabilität bedingt, dass der Einheitskreis im Konvergenzgebiet liegt.**

Man wird also im allgemeinen das Gebiet von z so vorgeben, dass das System stabil ist. Damit ist aber umgekehrt die Konvergenz der Teilsysteme eindeutig festgelegt. Die Rücktransformation kann dann leicht hingeschrieben werden.

Systemeigenschaften

Gegeben sei das System S . Es gilt: $S\{f(t)\} = g(t)$

Linearität

Ein System ist linear, wenn folgendes gilt:

$$S\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 S\{f_1(t)\} + \alpha_2 S\{f_2(t)\} = \alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t) \quad \text{mit } \alpha_k \in \mathbb{C}$$

$$S\left\{\sum_k \alpha_k f_k(t)\right\} = \sum_k \alpha_k S\{f_k(t)\} = \sum_k \alpha_k g_k(t) \quad (\text{Superpositionsprinzip})$$

Eine direkte Konsequenz der Linearität ist: $S\{0\} = 0$

Zeitinvarianz

Zeitliche Verzögerungen des Eingangssignals bewirken bei Zeitinvarianz eine ebenso grosse

zeitliche Verzögerung des Ausgangssignals.

$$S\{f(t-t_0)\}=g(t-t_0)$$

BIBO-Stabilität (Bounded Input Bounded Output stability)

Falls das Ausgangssignal bei jedem beliebigen beschränkten Eingangssignal $f(t)$ immer beschränkt bleibt, wird das System (BIBO-) stabil bezeichnet.

$$|f(t)| \leq B_f \Rightarrow |g(t)| \leq B_g$$

Kausalität

Ein System heisst kausal, wenn das Ausgangssignal $g(t)$ in einem bestimmten Zeitpunkt t_0 ausschliesslich vom vergangenen Eingangssignal $f(t)$ für $t \leq t_0$ abhängt. $g(t)$ ist somit unabhängig vom Verlauf von $f(t)$ für $t > t_0$.

$$g(t) = S\{f(t), t \leq t_0\}$$

Merke: Echtzeitrealisierungen (online) sind immer kausal. Nur dort wo Daten zwischengespeichert werden, sind akausale Systeme möglich (Offline-Datenverarbeitung).

Ein LTI-System $h(t)$ ist kausal, wenn gilt:

$$h(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

Dies folgt direkt aus der Faltung des Systems $h(t)$ mit dem Eingang $x(t)$:

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau \rightarrow h(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

Realisierbarkeit

Systeme, die stabil als auch kausal sind, werden als realisierbar bezeichnet.

LTI-Systeme (Linear Time Invariant Systems)

Systeme, die linear als auch zeitinvariant sind, werden LTI-Systeme genannt. LTI-Systeme besitzen immer eine Impuls- und eine Schrittantwort. Existiert die Impuls- und Schrittantwort eines Systems, so ist das System ein LTI-System. Im anderen Fall ist das System kein LTI-System.

Gedächtnis

Bei gedächtnislosen Systemen hängt das Ausgangssignal nur vom momentanen Wert des Eingangssignals ab. Bei Systemen mit Gedächtnis beeinflusst auch die „Vorgeschichte“ des Eingangssignals das Ausgangssignal. Es gilt also:

$$g(t) = S\{f(t)\} \quad \text{Gedächtnisloses System}$$

$$g(t) = S\{f(t-n)\} \quad \text{System mit Gedächtnis mit } n > 0$$

Invertierbarkeit

Bei invertierbaren Systemen lässt sich vom Ausgangssignal auf das Eingangssignal zurückschliessen.

$$f(t) \Leftrightarrow g(t) \quad \text{mit } f(t) \neq 0, \forall t \quad S \text{ ist invertierbar!}$$

Einteilung der Signale

Die Signale lassen sich wie folgt einteilen:

- analoge Signale
- amplitudendiskrete Signale
- zeitdiskrete Signale
- digitale Signale

	Zeit	kontinuierlich	diskret
Signalamplitude			
kontinuierlich		analog	zeitdiskret
diskret		amplitudendiskret	digital

Fourier-Reihen

$f(t)$ ist ein periodisches Signal mit der Periode T :

$$f(t+T) = f(t), \forall t$$

Analyse

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Synthese

Im Gegensatz zur zeitkontinuierlichen Fouriertransformation weist die Fourierreihenentwicklung ein diskretes Spektrum auf. Es gilt:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Abtastung

Für verzerrungsfreie Rekonstruktion eines Signals muss gelten

$$f_s \geq 2 \cdot f_g$$

d.h., die Abtastfrequenz f_s muss grösser sein als 2 mal die höchste im Originalsignal vorkommende Frequenz f_g .

Man unterscheidet drei Arten von Abtastung:

- **kritische Abtastung:**

$$T = \frac{1}{2f_g} \quad \text{oder} \quad f_s = 2f_g$$

Die kritische Abtastfrequenz f_s wird auch als **Nyquistrate** bezeichnet.

- **Überabtastung:**

$$T < \frac{1}{2f_g} \quad \text{oder} \quad f_s > 2f_g$$

- **Unterabtastung:**

$$T > \frac{1}{2f_g} \quad \text{oder} \quad f_s < 2f_g$$

Faltung

Zeitkontinuierliche Faltung

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

Zeitdiskrete Faltung

$$g[n] = \sum_{-\infty}^{+\infty} f[k] h[n-k] = \sum_{-\infty}^{+\infty} f[n-k] h[k]$$

Eigenschaften der Faltung

- Kommutativgesetz: $(f * h)(t) = (h * f)(t)$
- Distributivgesetz: $(f * (h_1 + h_2))(t) = (f * h_1)(t) + (f * h_2)(t)$
- Assoziativgesetz: $(f * (h_1 * h_2))(t) = ((f * h_1) * h_2)(t)$

Graphische Deutung

Graphisch lässt sich die Faltung wie folgt deuten:

- Spiegelung der Funktion $h(t)$ an der y-Achse
- Verschiebung um t
- Multiplikation mit $f(\tau)$
- Summation über τ von $-\infty \dots +\infty$

Graphische Faltung

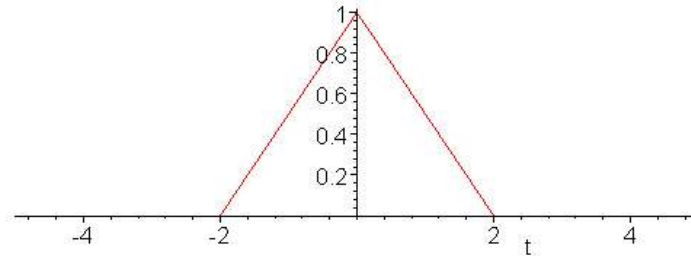
In der Praxis ist oft die Faltung eines endlichen Impulses mit einer bestimmten Breite und einer bestimmten Höhe verlangt. In diesem Fall erweist sich die graphische Faltung in vielen Fällen als sehr einfach. Das folgende Verfahren soll dies aufzeigen:

- Spiegelung der Funktion $h(t)$ an der y-Achse
- Summation aller Teilflächen, die $h(t)$ mit der Funktion $f(t)$ gemeinsam haben
- Wert bei $t=0$ eintragen.
- Verschiebung (Offset) der Funktion $h(t)$ um eine frei wählbare Schrittweite nach rechts oder links
- Wiederum Summation über alle Teilflächen und Wert bei $t=0+\text{Offset}$ eintragen

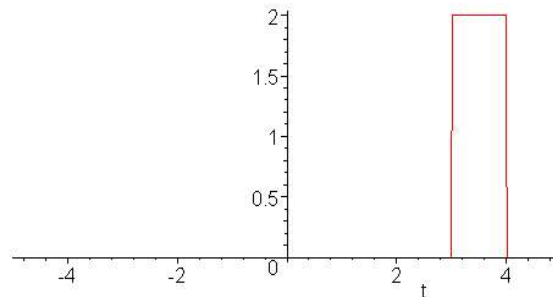
- Diesen Prozess solange fortsetzen bis das gesamte Intervall der Funktion $f(t)$ durchlaufen ist.
- Ist die Höhe des Impulses nicht 1 sondern H , dann muss die erhaltene Funktion noch mit H multipliziert werden.

Das folgende Beispiel soll dies illustrieren:

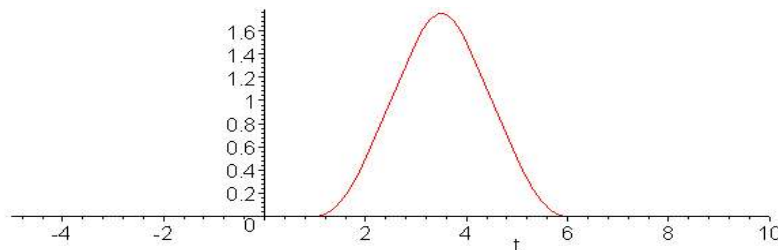
$$f(t) = (-|t| + 1) \cdot \sigma(t + 2) \cdot \sigma(2 - t)$$



$$h(t) = \sigma(t - 3) \cdot \sigma(4 - t)$$



$$F(t) = (f * h)(t)$$



Im allgemeinen Fall wird man versuchen die Funktion zu diskretisieren. Anstelle der Teilflächenberechnung tritt nun die Berechnung der diskreten Stützstellen. Es kann folgendes Verfahren angegeben werden:

- Spiegelung der Funktion $h(t)$ an der y-Achse
- Multiplikation über alle gemeinsamen Stützstellen und deren Summation
- Wert bei $t=0$ eintragen.
- Verschiebung (Offset) der Funktion $h(t)$ um die Schrittweite der Stützstellen nach rechts oder links
- Wiederum Multiplikation über alle gemeinsamen Stützstellen und deren Summation
- Anschliessend Wert bei $t=0+\text{Offset}$ eintragen.
- Diesen Prozess solange fortsetzen bis das gesamte Intervall der Funktion $f(t)$ durchlaufen ist.

Mathematische Methoden

Reelle Partialbruchzerlegung

Gegeben sei eine echt gebrochen rationale Funktion: $f(x) = \frac{Z_n(x)}{N_m(x)}$ mit $n < m$, wobei n den Grad des Zählerpolynoms und m der Grad des Nennerpolynoms angibt. Die Partialbruchzerlegung verläuft wie folgt:

1. Polstellen, also Nullstellen von $N_m(x)$, aufsuchen.
2. Für die gefundenen Polstellen verwendet man folgenden Ansatz:
 - Bei einfachen Polstellen (Vielfachheit 1):

$$\frac{A}{x - x_{pol}}$$

- Bei k -fachen Polstellen (Vielfachheit k):

$$\frac{A_1}{x - x_{pol}} + \frac{A_2}{(x - x_{pol})^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_{pol})^k}$$

3. Die Partialbruchzerlegung von $f(x)$ ist dann die Summe aller Partialbrüche. Weiter gilt:

Anzahl der Partialbrüche = Anzahl der Polstellen

4. Nun müssen noch die Konstanten A_k bestimmt werden. Dazu werden zunächst alle Brüche auf einen gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) gebracht. Anschliessend lässt sich das Zählerpolynom $Z_n(x)$ mit dem Zählerpolynom des erstellten Bruches vergleichen. Durch sukzessives Einsetzen der Polstellen erhält man ein Gleichungssystem, mit dem man die Konstanten A_k bestimmen kann. Auch Koeffizientenvergleich ist oft möglich.

Komplexe Partialbruchzerlegung

Die komplexe Partialbruchzerlegung erfolgt genau gleich wie die reelle Partialbruchzerlegung. Der einzige Unterschied besteht darin, dass man mit komplexen Polstellen operiert. Dementsprechend muss der Ansatz zur Bildung der Partialbrüche angepasst werden. Für die Polstellen gilt:

- Bei einfachen Polstellen (Vielfachheit 1):

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$$

- Bei k -fachen Polstellen (Vielfachheit k):

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(x^2 + px + q)^k}$$

Das weitere Vorgehen unterscheidet sich nicht von der reellen Partialbruchzerlegung.

Residuensatz

Bei zweiseitigen Transformationen wird im allgemeinen von dem Residuensatz abgeraten, da sich leicht Fehler einschleichen können.

Gegeben sei ein uneigentliches Integral: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Für die Lösung gilt dann: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi j \cdot \sum_{i=1}^n \text{Res}[f(z), z=a_i]$

$f(z)$ ist die Funktion $f(x)$, die in den komplexen Raum abgebildet wurde. a bezeichnet die Polstellen von $f(z)$.

Für die Residuen gilt:

- Bei einfachen Polstellen:

$$\text{Res}[f(z), z=a] = \text{Res}\left[\frac{\phi(z)}{\psi(z)}, z=a\right] = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}$$

- Bei m-fachen Polstellen:

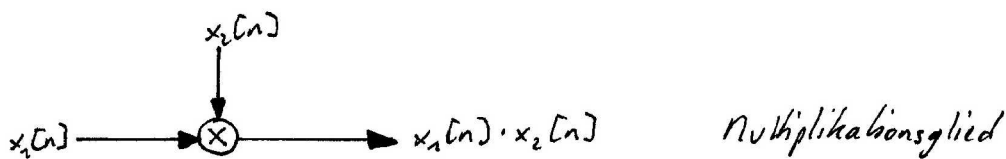
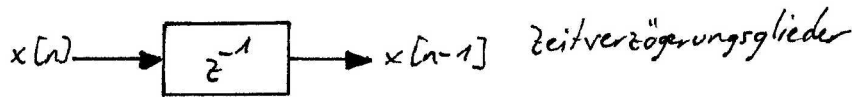
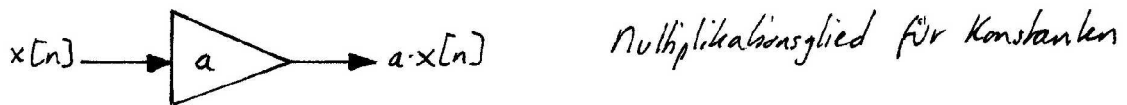
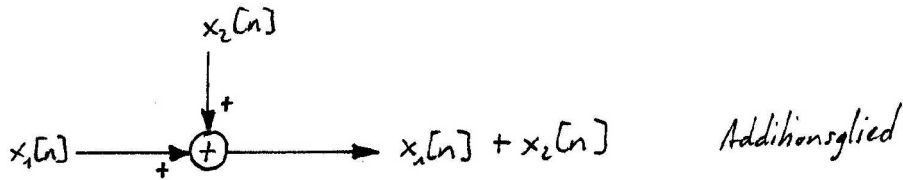
$$\text{Res}[f(z), z=a] = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z) \cdot (z-a)^m], z=a$$

Kunstgriffe

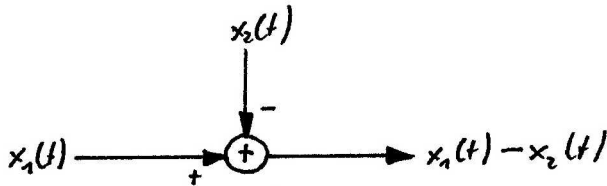
Systemdifferenzgleichungen

Die folgenden Schaltsymbole erweisen sich bei der Synthese oder bei der Analyse von Blockschaltbildern als nützlich:

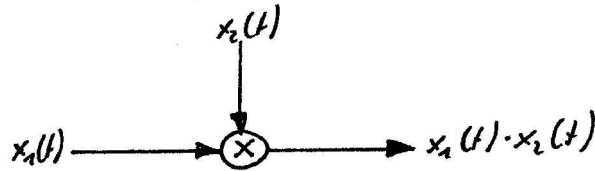
Z-Transformation:



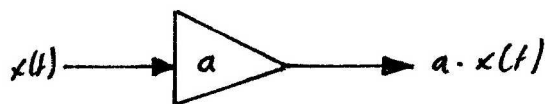
Lapacetransformation:



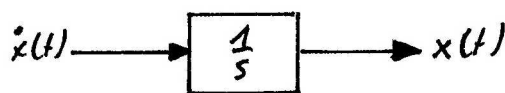
Additionsglied



Multiplikationsglied



Multiplikationsglied für Konstanten



Integrierglied

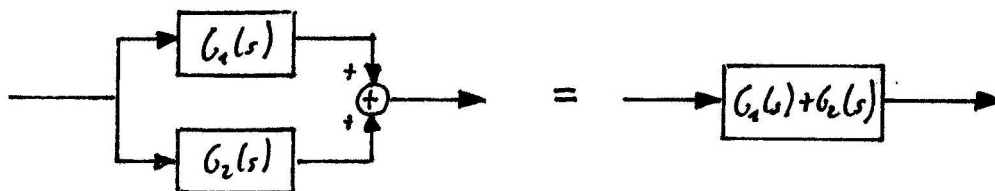


Differenzierglied

Serieschaltung:



Parallelschaltung:



Zeichenregel für Funktionen

- $f(k \cdot t)$ $k > 1$: Stauchung der x-Achse um $1/k$
 $k < 1$: Streckung der x-Achse um $1/k$
- $f(t+v)$ $v > 0$: Verschiebung nach links (\leftarrow)
 $v < 0$: Verschiebung nach rechts (\rightarrow)

- $f(k \cdot (t+v))$ Funktion immer auf diese Form bringen und von „ausen nach innen“ abarbeiten:
 1. Spiegelung
 2. Streckung, Stauchung
 3. Verschiebung
- $f(-t)$ Die Spiegelung erfolgt an der y-Achse.
- $m \cdot f(t)$ $m > 1$: Streckung der y-Achse um m
 $m < 1$: Stauchung der y-Achse um m

Faltung und Funktionsargumente

Gegeben seien zwei Funktionen f und h, die miteinander gefaltet werden sollen. Die Funktion f besitzt zusätzlich eine Verschiebung um die Konstante K im Argument. Wie berechnet man nun die Faltung?

Es gilt also:

$$g(t) = f(t-K) * h(t)$$

Man führt eine Funktion r(t) ein:

$$r(t) = f(t-K) \quad \text{mit der Konstanten K}$$

Damit gilt:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f((t-\tau)-K) \cdot h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau-K) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

Gerader und ungerader Anteil einer Funktion bestimmen

Eine Funktion x(t) bestehe aus einem geraden Anteil $x_g(t)$ und einem ungeraden Anteil $x_u(t)$. Es gilt:

$$x(t) = x_g(t) + x_u(t)$$

Für den geraden Anteil gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot (x(t) + x(-t)) = \frac{1}{2} \cdot (x_g(t) + x_u(t) + x_g(-t) + x_u(-t)) = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} \cdot (x_g(t) + x_u(t) + x_g(t) - x_u(t)) = \frac{1}{2} \cdot (2x_g(t)) = x_g(t)$$

Für den ungeraden Anteil gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot (x(t) - x(-t)) = \frac{1}{2} \cdot (x_g(t) + x_u(t) - x_g(-t) - x_u(-t)) = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} \cdot (x_g(t) + x_u(t) - x_g(t) + x_u(t)) = \frac{1}{2} \cdot (2x_u(t)) = x_u(t)$$

Die Zeichenregeln lauten also:

- Für den geraden Anteil $x_g(t)$ gilt:
 1. $x(t)$ spiegeln und mit der Ausgangsfunktion addieren.
 2. Amplitude der erhaltenen Funktion um $\frac{1}{2}$ stauchen.
- Für den ungeraden Anteil $x_u(t)$ gilt:
 1. $x(t)$ spiegeln und Amplitude negieren.
 2. Addition der negierten Funktion mit der Ausgangsfunktion.
 3. Amplitude der erhaltenen Funktion um $\frac{1}{2}$ stauchen.

Sprungfunktion und Deltaimpuls (Diracstoss)

Siebeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \Leftrightarrow \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = 1$$

Fläche unter dem Deltaimpuls

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Beziehung zur Sprungfunktion

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \Leftrightarrow \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

Faltung zweier Rechteckfunktionen: Dreiecksfunktion

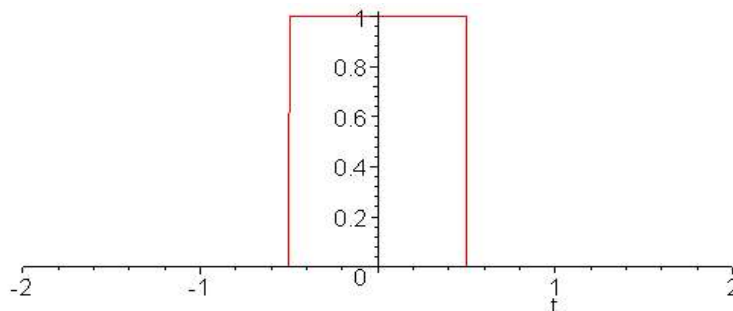
$h(t) = 1$ für $t = [-T/2, T/2]$

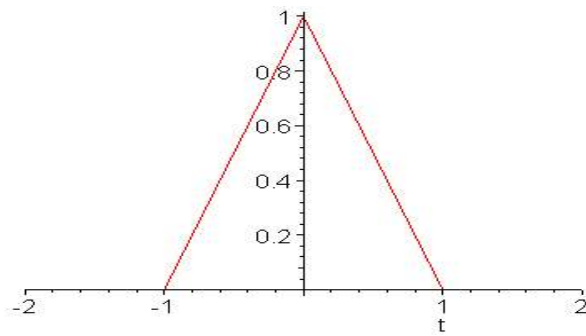
$h(t) = 0$ sonst

$$h(t) = \sigma\left(t + \frac{T}{2}\right) \cdot \sigma\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

$$(h * h)(t) = (|t| + T) \cdot \sigma(t + T) \cdot \sigma(T - t)$$

Für $T=1$ erhält man:





Transformationstabellen und wichtige Beziehungen

Siehe Beiblatt!

Quellenangaben

- Volesungsskript 'Signal- und Systemtheorie I' von Prof. Bölcskei
- Übungsskript 'Signal- und Systemtheorie I' von Prof. Bölcskei