Formelsammlung
Felder und Komponenten I

von Stephan Senn, D-ITET

Inhaltsverzeichnis

Elektrostatik

Coulomb'sches Gesetz: Kraft zwischen Ladungen

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_i Q_j}{r^2} \cdot \vec{e}_{ji}$$

Es gilt das Superpositionsprinzip:

$$\vec{F}_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j(\vec{r}_0 - \vec{r}_j)}{\left|\vec{r}_0 - \vec{r}_j\right|^3} \qquad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'$$

ρ: Raumladungsdichte r: Radius, Abstand
Q: Ladung

Elektrische Feldstärke E

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Nach dem Superpositionsprinzip gilt:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j(\vec{r} - \vec{r}_j)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_j\right|^3} \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'$$

Satz von Gauss in der Elektrostatik

$$\psi_{\partial V} = \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$

Merke: Die Ladung eines Leiters ist auf dessen Oberfläche verteilt.

Mechanische Arbeit

$$W_\Gamma = Q_0 \cdot \int_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

Elektrisches Potential und Spannung

$$\boxed{U_{12} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

$$1 \xrightarrow{U_{12}} 2$$

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_a) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_j}{\left|\vec{r} - \vec{r}_j\right|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|} dV' \qquad \varphi_{\vec{r}_a}(\vec{r}) = \frac{W_{\vec{r}_a}(\vec{r})}{q}$$

Normierungspunkte: $\varphi(\vec{r}_a) = 0$, $\varphi_{\vec{r}_a}(\vec{r}_a) = 0$

Merke: Für einen beliebigen geschlossenen Weg Γ_0 gilt:

$$\oint_{\Gamma_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ mit } \vec{r} = \vec{r}_a$$

Dies ist zugleich auch die Charakterisierung des elektrostatischen Feldes E. Das Potential hängt somit nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, ist also wegunabhängig. Somit ist E ein konservatives Feld; ein Potentialfeld. Man spricht auch von einem wirbelfreien Feld. Es gilt zudem:

$$rot(\vec{E}) = \vec{0}$$

Kapazität

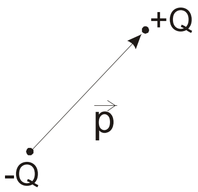
$\boxed{Q = CU}$

Energie im Kondensator

$$W = \int dW = \int U(Q) \cdot dQ = \int_0^Q \frac{Q}{C} \cdot dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

Dipolmoment

$\vec{p} = Q\vec{d}$



Dipoldichte, Polarisation, Polarisationsfeld P

- Allgemein: $\vec{P} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \cdot \sum_j \vec{p}_j \right)$
- $\vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{P}_v(\vec{E})$
- An Materie gebundene Raumladungsdichte: $\rho_{geb}(\vec{r}) = -div(\vec{P})$
- Weiter gilt nach Gauss: $-\oiint_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{F} = \iiint_V -div(\vec{P}) dV = \iiint_V \rho_{geb} dV$

Dielektrisches Verschiebungsfeld D

- Polarisation: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ mit der elektrischen Suszeptibilität χ_e
- relative Dielektrizitätskonstante: $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$
- Permittivität: $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$
- totale Ladungsdichte: $\rho_{tot} = \rho_{frei} + \rho_{geb}$
- dielektrisches Verschiebungsfeld:
  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot (1 + \chi_e) \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$
- Für die totale Raumladungsdichte gilt: $\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \rho_{tot} dV$

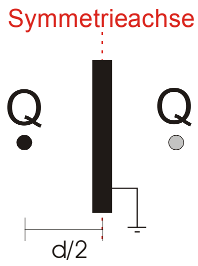
Merke: Ist $\rho_{geb} = 0$ dann ist $\vec{P} = \vec{0}$ und es gilt:

$$\rho_{tot} = \rho_{frei} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \rho_{frei} dV$$

Bei homogen, linear, isotropem Material darf ε_0 durch ε ersetzt werden.
Die Beziehungen bleiben erhalten.

Anmerkung: Es wird hier immer homogen, linear, isotropes Material vorausgesetzt.

Spiegelladungsverfahren



Um die resultierende Kraft einer Ladung Q vor einer ungeladenen Metallplatte zu berechnen, bedient man sich folgendem Trick: Man spiegelt die Ladung Q an der Symmetrieachse der Metallplatte und berechnet dann die Kraft zwischen diesen Ladungen. Die berechnete Kraft entspricht dann genau der Kraft der Ladung Q zur Metallplatte. Nach dem Coulomb'schen Gesetz gilt also:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{d^2}$$

Bildladungsverfahren

Mit dem Satz von Gauss kann man zeigen, dass das Feld einer Punktladung im Zentrum einer Kugel das genau gleiche E-Feld ergibt wie eine homogene Kugelflächenladung. Dies führt auf die Idee, bei gekrümmten Oberflächen J Punktladungen Q_j unbekannter Stärke im Elektrodeninnern anzuordnen. Zur j-ten Punkt- oder Bildladung (am Ort $\underline{r}_j$) gehört dann das folgende Potential:

$$\varphi(\vec{r}) = Q_j \tilde{\varphi}_j(\vec{r}) \qquad \text{mit } \tilde{\varphi}_j(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\left|\vec{r} - \vec{r}_j\right|}$$

Man bestimmt nun die Ladungen Q_j. Die Elektrodenladung ergibt sich als Summe aller Bildladungen innerhalb der Elektrode.

Grundgleichungen

Es wird homogenes, lineares sowie isotropes Material ohne feste Polarisation vorausgesetzt.

- $rot(\vec{E}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -grad(\varphi)$
- $div(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$
- Poisson-Gleichung: $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon}$

Gleichstrom

Merke: Diese Beziehungen gelten nur im statischen Fall. Sie sind also unabhängig von der Zeit t.

Der galvanische Strom

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Leitfähigkeit σ und Stromdichte J

Für metallische Leiter und für eine Reihe weiterer Stoffe gilt das Ohm'sche Gesetz:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}}$$

Weiter gilt:

$$\oiint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{F} = 0 \qquad \oint_{\Gamma_0} \vec{J} \cdot d\vec{l} = 0$$

Merke: An Grenzflächen kann die Stromdichte nicht springen, sondern muss zwangsläufig stetig sein.

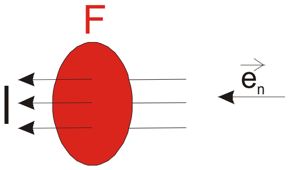
Stromdichte J und Strombelag α

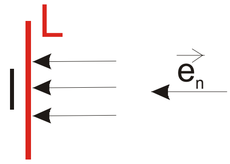
Stromdichte J

$$\vec{J} = \frac{I}{F} \cdot \vec{e}_n$$

Strombelag α

$$\vec{\alpha} = \frac{I}{L} \cdot \vec{e}_n$$





Trick: Felder von sehr dünnen Folien und Grenzschichten können durch die Superposition von parallelen Einzelströmen elegant gelöst werden.

Leistung P und Leistungsdichte p_j

$$\Delta W = UI\Delta t = \Delta QU \qquad P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = UI$$

$$p_j = \frac{\Delta W}{V\Delta t} = \vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\sigma}\left|\vec{J}\right|^2 = \sigma\left|\vec{E}\right|^2 \qquad P = \iiint_V p_j dV$$

Widerstand R

Nach dem Ohm'schen Gesetz gilt:

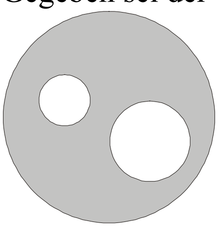
$$R = \frac{U}{I}$$

Daraus folgt:

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{1}{I^2}\iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

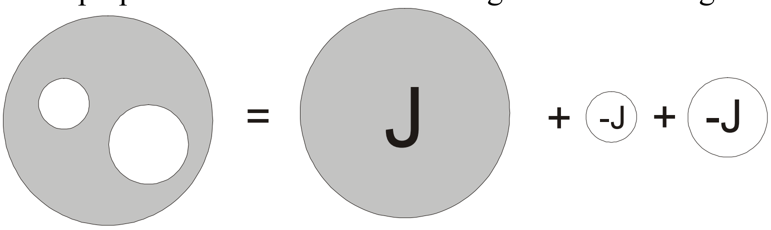
Superposition von Leitern

Gegeben sei der Querschnitt eines Rundleiters:



Nur der grau schattierte Teil der Querschnittsfläche wird vom Strom durchflossen. In den weissen Kreisflächen fliesst kein Strom. Das E- und H-Feld ist hier aber nicht null, sondern konstant.

Die Berechnung der E- und H-Felder kann wesentlich vereinfacht werden, wenn dieser Leiter als Superposition von Rundleitern aufgefasst wird. Es gilt dann:



Man muss nun lediglich die E- und H-Felder der einzelnen Leiter bestimmen. Die Superposition der E- und H-Felder der einzelnen Leiter ergibt das resultierende E- und H-Feld.

Grundgleichungen

Es wird homogenes, lineares und isotropes Material vorausgesetzt.

- $rot(\vec{J}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{J} = -\sigma grad(\varphi)$
- $div(\vec{J}) = 0 \Rightarrow \vec{J} = rot(\vec{H})$
- Poisson-Gleichungen: $\Delta\vec{J} = \vec{0}$, $\Delta\varphi = 0$

Magnetostatik

Man beachte die Analogie zur Elektrostatik.[1]

Analogon zum Coulomb'schen Gesetz

$\vec{F}_j = \dfrac{p_i p_j}{4\pi\mu_0 r^2}\vec{e}_{ji}$ mit der Polstärke p

Mit dem Superpositionsprinzip gilt:

$$\vec{F}_0 = \frac{p_0}{4\pi\mu_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j(\vec{r}_0 - \vec{r}_j)}{\left|\vec{r}_0 - \vec{r}_j\right|^3}$$

Merke: Es gibt keine magnetischen Monopole! Es handelt sich hier nur um eine Modellvorstellung.

Magnetische Feldstärke H

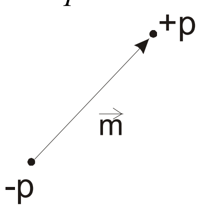
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{p} = \frac{p}{4\pi\mu_0 r^2}\vec{e}_r$$

Mit dem Superpositionsprinzip gilt:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{p_j(\vec{r} - \vec{r}_j)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_j\right|^3}$$

Magnetisches Dipolmoment

$\vec{m} = p\vec{d}$



[1] p bezeichnet hier die magnetische Polstärke; nicht zu verwechseln mit dem elektrischen Dipolmoment in der Elektrostatik.

Magnetisierung, magnetische Polarisation P_m

- Allgemein: $\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{1}{\Delta V}\sum_j \vec{m}_j\right)$
- $\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}_v(\vec{H})$
- An Materie gebundene magnetische Raumladungsdichte: $\rho_{m,geb}(\vec{r}) = -\mu_0 div(\vec{M})$
- Weiter gilt nach Gauss: $-\oint\!\!\oint_{\partial V} \mu_0 \vec{M} \cdot d\vec{F} = \iiint_V -\mu_0 div(\vec{M}) dV = \iiint_V \rho_{m,geb} dV$
- $\overrightarrow{P_m} = \mu_0 \vec{M}$

Magnetische Induktion und magnetische Flussdichte B

- Magnetisierung: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ mit der magnetischen Suszeptibilität χ_m
- relative Permeabilität: $\mu_r = 1 + \chi_m$
- Permeabilität: $\mu = \mu_0 \mu_r$
- totale magnetische Ladungsdichte: $\rho_{m,tot} = \rho_{m,geb}$

  Die totale magnetische Ladungsdichte entspricht der gebundenen magnetischen Ladungsdichte.

  Merke: Es gibt keine freien magnetischen Ladungen! $\rho_{m,frei} = 0$
- magnetische Induktion:

  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu \vec{H}$
- Für die totale magnetische Raumladungsdichte gilt:

  $\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \rho_{m,tot} dV = \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \rho_{m,geb} dV$

Merke: Ist die gebundene magnetische Ladungsdichte null, dann gilt:

$\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0$ Begründung: $\rho_{m,geb} = 0$

Anmerkung: Es wird hier immer homogen, linear, isotropes Material vorausgesetzt.

Einteilung der magnetischen Stoffe

- ferromagnetische Stoffe: $\mu_r \approx 10^2 ... 10^6$
- paramagnetische Stoffe: $\mu_r > 1$
- diamagnetische Stoffe: $\mu_r < 1$

Gesetz von Biot-Savart: Wirkung des elektrischen Stromes

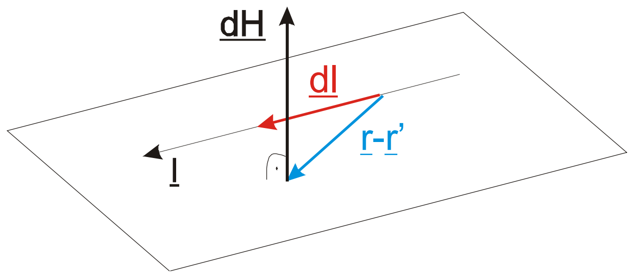
Stromschleife:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_S \frac{d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$d\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3}$$

allgemeine Form:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} dV'$$

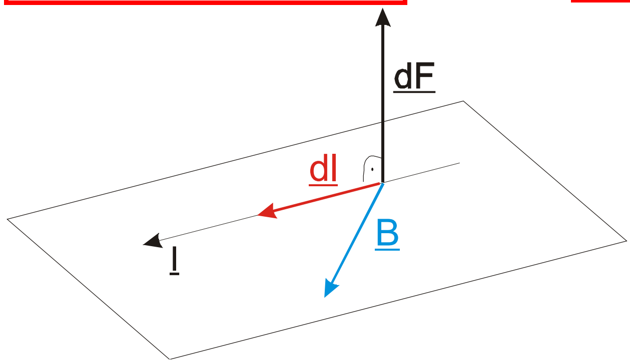


Durchflutungsgesetz

$$\boxed{\oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{F} \vec{J} \cdot d\vec{F}}$$

Lorentz-Kraft

$$\boxed{d\vec{F} = \mu_0 \cdot (I\,\vec{dl} \times \vec{H}_0) = I\,\vec{dl} \times \vec{B}_0} \qquad \boxed{\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})}$$



Merke: Man benutze die rechte Hand. Der Daumen zeigt in die Richtung des Stromes und die Finger zeigen in Richtung des B- bzw. H-Feldes.

Feldprobleme mit Permanentmagneten

- $rot(\vec{H}) = \vec{J}_0$
- $div(\vec{H}) = -div(\vec{M}_0)$

Grundgleichungen

Es wird homogenes, lineares und isotropes Material ohne feste Magnetisierung vorausgesetzt.

- $rot(\vec{H}) = \vec{J}_0$
- $div(\vec{H}) = 0 \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu} rot(\vec{A})$
- Coulomb-Eichung: $div(\vec{A}) = 0$
- Poisson-Gleichung: $\Delta\vec{A} = -\mu\vec{J}_0$

Analogie der Strömungsfelder

Merkmal:	In der Elektrostatik:	In der Magnetostatik:
Kenngrössen	J E σ	B H μ
Fluss	Elektrischer Fluss, Strom: $I = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{F}$	Magnetischer Fluss: $\Phi = \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{F}$
Spannung	Elektrische Spannung: $U = \int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l}$	Magnetische Spannung: $\Theta = \int_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l}$
Widerstand	Elektrischer Widerstand: $R = \frac{U}{I}$	Magnetischer Widerstand: $R_m = \frac{\Theta}{\Phi}$
Ohm'sches Gesetz	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
Homogenes, lineares, isotropes Material	$\oiint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{F} = 0 \quad \oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0 \quad \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ kein elektr. Stromfluss durch das Material!

Anmerkung: Oft wird der magnetische Fluss in einen Nutzfluss Φ (eigentlicher Fluss) und einem Streufluss Φ_S (Leckfluss) aufgeteilt.

Merke: In der Magnetostatik kann mit den Grössen Fluss, Spannung und Widerstand genau gleich gearbeitet werden wie in der Elektrostatik. Insbesondere können auch hier Ersatzschaltbilder gezeichnet werden. Maschen- und Knotenregel sind ebenfalls gültig.

Materialgleichungen

Grundgleichungen

ε, μ, σ sind Materialparameter, die im allgemeinen auch komplex sein können. Es gilt:

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} + \mu \vec{M}$ mit $\mu \neq \mu_0 \wedge \varepsilon > \varepsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ mit $\sigma \geq 0$

Die Leitfähigkeit σ ist meist linear vom E-Feld abhängig und richtungsunabhängig (isotrop).

Homogenes / Inhomogenes Material

Bei homogenem Material ist die Permettivität ε, die Permeabilität μ sowie die Leitfähigkeit nicht vom Ort abhängig, sondern überall konstant. Bei Ortsabhängigkeit spricht man von inhomogenem Material. Es gilt also:

- Homogenes Material: $\varepsilon_r = const$, $\mu_r = const$, $\sigma = const$
- Inhomogenes Material: $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\vec{r})$, $\mu_r = \mu_r(\vec{r})$, $\sigma = \sigma(\vec{r})$

Lineares / Nichtlineares Material

Bei linearem Material ist die Polarisation P sowie die Magnetisierung M linear vom E- bzw. H-Feld abhängig. Die Leitfähigkeit σ ist linear vom E-Feld abhängig. Im anderen Fall spricht man von nichtlinearem Material.

- Lineares Material:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot (1+\chi_e) \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \qquad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 \cdot (1+\chi_m) \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

- Nichtlineares Material:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{H}) \qquad \vec{D} = \vec{E} \varepsilon_0 + P$$

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{E}, \vec{H}) \qquad B = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{J} \neq \sigma \vec{E}$$

Isotropes / Anisotropes Material

Bei isotropem Material ist die Permettivität ε, die Permeabilität μ und die Leitfähigkeit σ nicht von der Richtung abhängig. Bei Richtungsabhängigkeit spricht man von anisotropem Material. Die Beschreibung der Permettivität, der Leitfähigkeit sowie der Permeabilität erfordert dann einen Tensor, der meist Diagonalgestalt aufweist.

- Isotropes Material: $\varepsilon_r = const$, $\mu_r = const$
- Anisotropes Material: $\vec{\vec{\varepsilon}}_r = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$, $\vec{\vec{\mu}}_r = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}$`,

$$\vec{\vec{\sigma}}_r = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$ Tensoren!

Zeitvariable Magnetfelder

Induktionsgesetz

E_{ne} ist eine ‚nichtelektromagnetische' Feldstärke, also eine elektrodynamische Grösse. Es gilt:

$$\oint_{\partial F} \vec{E}_{ne} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = -\frac{d}{dt} \Phi \qquad \text{mit } \Phi = \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{F}$$

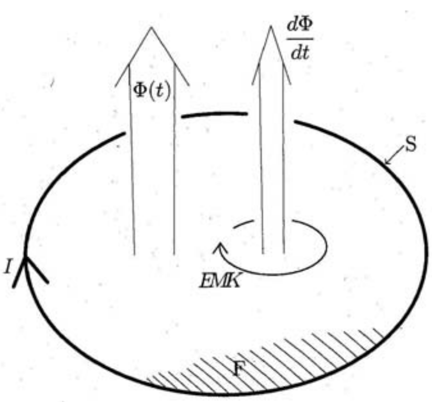
Induktivität L

$$\boxed{\Phi = L \cdot I}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = I(t) \cdot \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\partial F} \frac{\overrightarrow{dl'} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$d\vec{B} = I(t) \cdot \frac{\mu}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dl'} \times \Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|^3}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{I} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{F}}$$



Energie in einer stromdurchflossenen Spule

$$W = \int dW = \int I(\Phi) \cdot d\Phi = \int_0^\Phi \frac{\Phi}{L} \cdot d\Phi = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{\Phi I}{2} = \frac{LI^2}{2}$$

Induktive Spannung und induktiver Strom

$$EMK = U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad U = -EMK$$

$$I_{ind} = \frac{EMK}{R} \qquad \oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{F} \vec{J} \cdot d\vec{F}$$

Lenz'sche Regel oder Vorzeichenkonvention

Die Richtung der induzierten Spannung U_{ind} und des induzierten Stromes I_{ind} ist so gerichtet, dass das durch den induzierten Strom erzeugte B-Feld dem äusseren B-Feld entgegenwirkt.

Selbstinduktion

Die Induktion in der felderzeugenden Stromschleife selbst heisst Selbstinduktion. Nach der Lenz'schen Regel ist der zusätzliche induzierte Strom immer gegen die Änderung des ursprünglichen Stromes gerichtet.

Gegeninduktivität

Sind zwei Leiterschleifen derart zueinander positioniert, dass ein Strom in der einen Schleife einen Strom in der anderen induzieren kann, so sprechen wir von Gegeninduktivität. Dabei gelten folgende Gesetze:

$$U_i = L_i\frac{dI_i}{dt} + M_{ij}\frac{dI_j}{dt} \qquad U_j = L_j\frac{dI_j}{dt} + M_{ji}\frac{dI_i}{dt} \qquad M_{ij} = M_{ji}$$

L_i, L_j: Selbstinduktivitäten
M_{ij}, M_{ji}: Gegeninduktivitäten

Phasordarstellung

Es gilt:

$$A(t) = \hat{A}\cos(\omega t + \varphi) = \hat{A}\left[\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)\right]$$

$$A(t) = \hat{A}\cos(\varphi)\cos(\omega t) + (-\hat{A}\sin(\varphi))\sin(\omega t) = \hat{A}_C\cos(\omega t) + \hat{A}_S\sin(\omega t)$$

$$A(t) = \Re\left\{\underline{A} \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

Damit gilt:

$$A_C = \hat{A}\cos(\omega t) = \Re\left\{\underline{A}\right\} \qquad \hat{A} = \left|\underline{A}\right| \qquad \varphi = \arg(\underline{A})$$

$$A_C = -\hat{A}\sin(\omega t) = -\Im\left\{\underline{A}\right\}$$

Allgemein gilt dann:

- bei normalen Zeitfunktionen: $u(t) = \Re\left\{\underline{U} \cdot e^{j\omega t}\right\}$
- bei Zeitfunktionen in Vektorform: $\vec{E}(\vec{r},t) = \Re\left\{\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\right\} = \begin{pmatrix} \Re\left\{\underline{E}_x(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\right\} \\ \Re\left\{\underline{E}_y(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\right\} \\ \Re\left\{\underline{E}_z(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\right\} \end{pmatrix}$

Für Ableitungen nach der Zeit t gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) \Leftrightarrow j\omega\vec{E}(\vec{r})$$

Maxwell-Gleichungen

In Integralform

- $\oint\limits_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint\limits_{F} \vec{B} \cdot d\vec{F}$
- $\oint\limits_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint\limits_{F} \vec{J} \cdot d\vec{F} + \frac{d}{dt} \iint\limits_{F} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \iint\limits_{F} \vec{J} \cdot d\vec{F} + \iint\limits_{F} \vec{J}_V \cdot d\vec{F}$ mit $\vec{J}_V = \frac{d}{dt}\vec{D}$
  $\underline{J}_V$ wird Verschiebungsstromdichte genannt.
- $\oiint\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \iiint\limits_{V} \rho dV$
- $\oiint\limits_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0$

In Differentialform

- $rot(\vec{E}(\vec{r},t)) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t)$
- $rot(\vec{H}(\vec{r},t)) = \vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r},t) + \vec{J}_V(\vec{r},t)$ mit $\vec{J}_V = \frac{d}{dt}\vec{D}$
- $div(\vec{D}(\vec{r},t)) = \rho(\vec{r},t)$
- $div(\vec{B}(\vec{r},t)) = 0$

Maxwell-Gleichungen in Phasordarstellung

In Integralform

- $\oint\limits_{\partial F} \underline{\vec{E}} \cdot d\vec{l} = -j\omega \iint\limits_{F} \underline{\vec{B}} \cdot d\vec{F}$
- $\oint\limits_{\partial F} \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{l} = \iint\limits_{F} \underline{\vec{J}} \cdot d\vec{F} + j\omega \iint\limits_{F} \underline{\vec{D}} \cdot d\vec{F} = \iint\limits_{F} \underline{\vec{J}} \cdot d\vec{F} + \iint\limits_{F} \underline{\vec{J}}_V \cdot d\vec{F}$ mit $\underline{\vec{J}}_V = j\omega\underline{\vec{D}}$
  $\underline{J}_V$ wird Verschiebungsstromdichte genannt.
- $\oiint\limits_{\partial V} \underline{\vec{D}} \cdot d\vec{F} = \iiint\limits_{V} \underline{\rho} dV$
- $\oiint\limits_{\partial V} \underline{\vec{B}} \cdot d\vec{F} = \underline{0}$

In Differentialform

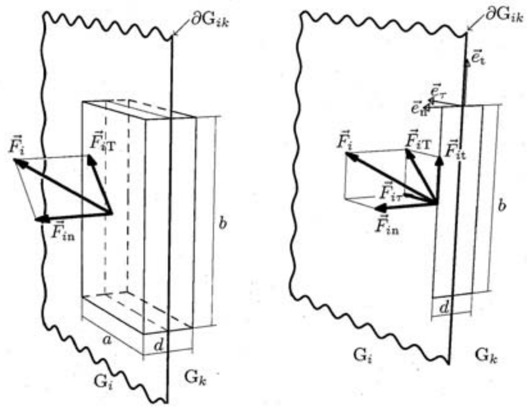
- $rot(\underline{\vec{E}}(\vec{r})) = -j\omega\underline{\vec{B}}(\vec{r})$
- $rot(\underline{\vec{H}}(\vec{r})) = \underline{\vec{J}}(\vec{r}) + j\omega\underline{\vec{D}}(\vec{r}) = \underline{\vec{J}}(\vec{r}) + \underline{\vec{J}}_V(\vec{r})$ mit $\underline{\vec{J}}_V = j\omega\underline{\vec{D}}$
- $div(\underline{\vec{D}}(\vec{r})) = \underline{\rho}(\vec{r})$
- $div(\underline{\vec{B}}(\vec{r})) = \underline{0}$

Grenzbedingungen

Die folgenden Beziehungen gelten auch im stationären Fall in Phasordarstellung.

Allgemeiner Fall: keine idealen Leiter, keine Grenzfolien

- $\vec{E}_{iT} - \vec{E}_{kT} = \vec{0}$ notwendige Bedingungen!
- $\vec{H}_{iT} - \vec{H}_{kT} = \vec{0}$
- $D_{in} - D_{kn} = \varsigma$
- $J_{in} - J_{kn} = -\dfrac{\partial \varsigma}{\partial t}$
- $B_{in} - B_{kn} = 0$
- $J_{in} + \dfrac{\partial D_{in}}{\partial t} - \left(J_{kn} + \dfrac{\partial D_{kn}}{\partial t} \right) = 0$



Spezialfall: ideale Leiter, Grenzfolien

- $\vec{E}_{iT} = \vec{0}$ notwendige Bedingung!
- $\vec{H}_{iT} = \vec{a} \times \vec{e}_n \Rightarrow \vec{a} = \vec{e}_n \times \vec{H}_{iT}$
- $D_{in} = \varsigma$
- $J_{in} = -div_F(\vec{\alpha}) - \dfrac{\partial \varsigma}{\partial t}$ $\qquad div_F(\vec{\alpha}) = \lim\limits_{F \to 0} \left(\dfrac{1}{F} \cdot \oint\limits_{\partial F} \vec{\alpha} \cdot (d\vec{l} \times \vec{e}_n) \right)$
- $B_{in} = 0$
- $J_{in} + \dfrac{\partial D_{in}}{\partial t} = -div_F(\vec{\alpha})$

Potentiale des elektromagnetischen Feldes

Die Potentiale $\underline{A}$ und φ genügen folgenden Beziehungen:

$$\vec{E} = -grad(\varphi) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad \vec{B} = rot(\vec{A})$$

Die Bildung dieser Potentiale beruht auf folgenden Grundüberlegungen:

$$rot(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = grad(s) \qquad \text{und} \qquad div(\vec{w}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{w} = rot(\vec{a})$$

Die Wellengleichung

Form der homogenen Wellengleichung

$$\Delta \vec{F}(\vec{r},t) = c \cdot \frac{\partial^2 \vec{F}(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung

Die Lösung wird mittels Separationsansatz gefunden. (siehe Analysis III!)

$\vec{F}(\vec{r},t) = \Re\left\{ \vec{C} \cdot e^{j \cdot (\omega t - \vec{k}\vec{r})} \right\}$ mit der Kreisfrequenz ω und dem Wellenvektor $\underline{k}$

Lösung inhomogener Wellengleichungen

Die Lösung wird in einen homogenen und einen inhomogenen Teil aufgespalten. Das Problem besteht dann in der Lösung der homogenen Wellengleichung und dem anschliessenden Lösen der Partikulärlösung, was im allgemeinen nicht einfach ist.

Die Wellengleichungen in der Elektrodynamik

- $\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$
- $\Delta\vec{H} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$

Überprüfung der Ergebnisse auf ihren physikalischen Sachverhalt

Auch wenn die einzelnen Wellengleichungen mit ihren Randbedingungen erfüllt sind, so ist dies keine notwendige Bedingung, dass eine Lösung für das physikalische Problem existiert. Erst die Koppelung der Ergebnisse sagt aus, ob der physikalische Sachverhalt stimmt. Dieses Mysterium rührt von der anfänglichen Entkoppelung her, die zwar den Sachverhalt massiv vereinfacht, jedoch bei der sich auch Fehler einschleichen können. Somit müssen die Lösungen der Wellengleichungen mittels Koppelung auf ihre Richtigkeit überprüft werden.

Lösung der homogenen Wellengleichungen in der Elektrodynamik

Die Lösung im Vakuum ist eine ebene Welle. Sie zeichnet sich dadurch aus, dass sie linear polarisiert ist und dass sie keine Feldkomponenten in Ausbreitungsrichtung besitzt. Zudem steht das H- und das E-Feld normal zueinander. Es gilt also:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \Re\left\{\vec{E}_0 \cdot e^{j\cdot(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right\}} \quad \text{und} \quad \boxed{\vec{H}(\vec{r},t) = \Re\left\{\vec{H}_0 \cdot e^{j\cdot(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\right\}}$$

Mit den Bedingungen:

$$\boxed{\vec{H}_0 = \frac{1}{\omega\mu_0}(\vec{k}\times\vec{E}_0)} \quad \boxed{\vec{E}_0\cdot\vec{k} = 0} \quad \vec{k}\cdot\vec{k} = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 = k_0{}^2$$

Der Wellenwiderstand (oder Wellenimpedanz genannt) lautet:

$$\boxed{Z = \frac{\left|\vec{E}_0\right|}{\left|\vec{H}_0\right|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$$

Der stationäre Zustand

Der stationäre Zustand ist dadurch ausgezeichnet, dass nach Voraussetzung alle Feldgrössen sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω von der Zeit abhängen. Zur Beschreibung eignet sich daher besonders die Phasorendarstellung. Die Maxwell-Gleichungen sowie die Grenzbedingungen können vorbehaltlos übernommen werden. Man beachte, dass zur Beschreibung der Felder komplexe Grössen, also Phasoren, verwendet werden. Man beachte ausserdem die Vereinfachung:

$$\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} = \frac{\partial\left(\underline{\vec{B}_0}\cdot e^{j(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right)}{\partial t} = j\omega\left(\underline{\vec{B}_0}\cdot e^{j(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\right) = j\omega\underline{\vec{B}}$$

Wellenverhalten

- Wellengleichungen:

$$\left(\Delta + \omega^2 \mu \varepsilon_c \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{0}} \qquad \left(\Delta + \omega^2 \mu \varepsilon_c \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{0}} \qquad \text{mit } \varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

- Allgemeine Lösungen der Wellengleichungen: stationärer Fall t=0

$$\underline{\vec{E}(\vec{r})} = \underline{\vec{E}_0} \cdot e^{-j\vec{k}\vec{r}} \qquad \underline{\vec{H}(\vec{r})} = \underline{\vec{H}_0} \cdot e^{-j\vec{k}\vec{r}}$$

- Wellenvektor bzw. Wellenzahl:

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c = \omega^2 \mu \varepsilon - j\omega\sigma = \omega\mu(\omega\varepsilon - j\sigma)$$

$$k = \beta - j\alpha$$

- Dämpfungskonstante α und Phasenkonstante β:

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 + 1} + 1} \qquad \alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2 + 1} - 1}$$

Praktische Abschätzungen

- Vergleichswellenlänge:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad \text{Approximation bei } \sigma \ll \omega\varepsilon$$

  Wenn die Abmessungen des Feldgebiets sehr viel kleiner sind als die Vergleichswellenlängen, können diese als unendlich gross angenommen werden, und man kann das Problem als statisches betrachten.

- Eindringtiefe (Skintiefe):

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \qquad \text{Approximation bei } \sigma \gg \omega\varepsilon$$

  Die Eindringtiefe sagt aus, wie weit die elektromagn. Wellen in das Material eindringen. Bei grosser Dämpfung resultiert eine sehr geringe Eindringtiefe, während bei schwacher Dämpfung die Wellen fast ungehindert das Material passieren.

Quasistatische Situation

Eine Situation heisst quasistatisch im Volumen V, wenn das Feld innerhalb von V mit guter Näherung genau gleich wie in der Statik berechnet werden kann.

Gesamtenergien im statischen Fall

G_Q ist das Quellgebiet.

- Elektrische Energie: $W_e = \frac{1}{2}\iiint_{G_Q} \varphi\rho\, dV$

- Magnetische Energie: $W_m = \frac{1}{2}\iiint_{G_Q} \vec{J} \cdot \vec{A}\, dV$

  Für einen dünnen Draht gilt speziell: $W_m = \frac{I}{2}\oint_D \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{2}\iint_{F_D} rot(\vec{A}) \cdot d\vec{F} = \frac{I}{2}\iint_{F_D} \vec{B} \cdot d\vec{F}$

$$I = \vec{J} \cdot d\vec{F}_Q$$

  D: Drahtschleife F_D: Flächeninhalt der Schleife

Energie und Leistung im elektromagnetischen Feld

Energiedichtefeld

$$w(\vec{r},t) = \lim_{V \to 0}\left(\frac{W_{elmag}}{V}\right)$$

Poynting'sches Energiekonzept

- Totale Energiedichte: $\boxed{w = w_e + w_m}$
- Elektrische Energiedichte: $\boxed{w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$
- Magnetische Energiedichte: $\boxed{w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$
- Poynting-Vektor: $\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}}$

Poynting-Theorem

Allgemein gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V w\,dV = -\iiint_V p\,dV - \oiint_{\partial V}\vec{S}\cdot d\vec{F}$$

$$-\oiint_{\partial V}\vec{S}\cdot d\vec{F} = \iiint_V\left(\frac{\partial w}{\partial t} + p_j + p_{elek} + p_{mag}\right)dV$$

$$p_j = \vec{J}\cdot\vec{E} \qquad p_{elek} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} - \vec{P}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \qquad p_{mag} = \frac{\mu_0}{2}\left(\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{M}}{\partial t} - \vec{M}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)$$

Energieumwandlungsraten

p_{elek}: Leistungsdichte des elekt. Feldes
p_{mag}: Leistungsdichte de magnet. Feldes
p_j: Joule'sche Leistungsdichte

Für homogen, linear, isotropes Material gilt:

$$-\oiint_{\partial V}\vec{S}\cdot d\vec{F} = \iiint_V\left(\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \sigma\vec{E}\cdot\vec{E}\right)dV$$ mit $p_{elek}=0$ und $p_{mag}=0$

Energieaustausch mit der Umgebung

$$P = -\oiint_{\partial V}\vec{S}\cdot d\vec{F}$$

Vorzeichenkonvention: $P > 0$: Das Volumen V nimmt Leistung auf.
$P < 0$: Das Volumen V gibt Leistung ab.

Das komplexe Poynting-Theorem (Phasordarstellung)

$$\underline{\underline{\vec{S}}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \times \underline{\vec{H}}^*(\vec{r})\right) \qquad \underline{\underline{\vec{S}}}^{\sim}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\vec{E}}(\vec{r}) \times \underline{\vec{H}}(\vec{r})\right)$$

$$-\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \underline{\underline{\vec{S}}} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \left(j\omega\left(\mu \underline{\vec{H}}\,\underline{\vec{H}}^* - \varepsilon^* \underline{\vec{E}}\,\underline{\vec{E}}^*\right) + \sigma^* \underline{\vec{E}}\,\underline{\vec{E}}^* \right) dV$$

$$-\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \underline{\underline{\vec{S}}}^{\sim} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \left(j\omega\left(\mu \underline{\vec{H}}\,\underline{\vec{H}} - \varepsilon \underline{\vec{E}}\,\underline{\vec{E}}\right) + \sigma \underline{\vec{E}}\,\underline{\vec{E}} \right) dV$$

Zeitlicher Mittelwert für p_j, w_e und w_m

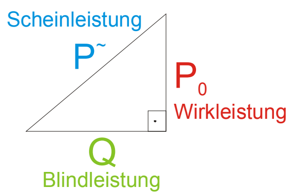
$$w_{e0} = \varepsilon \frac{\underline{\vec{E}}\,\underline{\vec{E}}^*}{4} \qquad w_{m0} = \mu \frac{\underline{\vec{H}}\,\underline{\vec{H}}^*}{4} \qquad p_{j0} = \sigma \frac{\underline{\vec{E}}\,\underline{\vec{E}}^*}{4}$$

Zeitlicher Mittelwert für S

$$-\oint\!\!\!\oint_{\partial V} \underline{\underline{\vec{S}}} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \left(2j\omega\left(w_{m0} - w_{e0}\right) + p_{j0} \right) dV$$

Schein-, Wirk- und Blindleistung für sinusoidale Zeitfunktionen

- **Wirkleistung:** $P_0 = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cos(\phi) = U_{eff} I_{eff} \cos(\phi)$
- **Blindleistung:** $Q = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \sin(\phi) = U_{eff} I_{eff} \sin(\phi)$
- **Scheinleistung:** $P^{\sim} = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = U_{eff} I_{eff} = \sqrt{P_0^2 + Q^2}$



Es gilt: $U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$, $I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$

In Phasorschreibweise gilt:

- **Wirkleistung:** $P_0 = \frac{1}{2}\Re\left\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\right\} = \frac{1}{2}\Re\left\{\underline{U}^* \cdot \underline{I}\right\}$
- **Blindleistung:** $Q = \frac{1}{2}\Im\left\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\right\} = -\frac{1}{2}\Im\left\{\underline{U}^* \cdot \underline{I}\right\}$
- **Scheinleistung:** $P^{\sim} = \frac{1}{2}\left|\underline{U} \cdot \underline{I}\right| = \frac{1}{2}\left|\underline{U} \cdot \underline{I}^*\right| = \frac{1}{2}\left|\underline{U}^* \cdot \underline{I}\right| = \frac{1}{2}\left|\underline{U}\right|\left|\underline{I}\right|$

Zweipolparameter und Felder

Zustandsgrösse U

- $U = \int_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} \vec{E} \cdot d\vec{l}$
- $\oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = -\frac{d\Phi}{dt} = -U_{ind}$
- Maschenregel: $U_{ind} + \sum_{i=1}^{n} U_i = 0$

Zustandsgrösse I

- $I = \iint_F \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{F}$
- $I = \oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{l}$
- Knotenregel: $I = \oiint_{\partial V} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} I_i = 0$

Zustandsgrösse P

- $P = U \cdot I = -\oiint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{F} = -\oiint_{\partial V} \left(\vec{E} \times \vec{H} \right) \cdot d\vec{F} = \oiint_{\partial V} \left(grad(\varphi) \times \vec{H} \right) \cdot d\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} U_i \cdot I_i$

Kenngrösse C

- unendlich grosses Integrationsgebiet: $C = \frac{1}{U^2} \iiint_{V\infty} \vec{D} \cdot \vec{E} dV$
- beschränktes Integrationsgebiet: $C = \frac{1}{U^2} \iiint_{G_Q} \varphi \rho dV = \frac{1}{U^2} \cdot \left(\varphi_1 \oiint_{\partial Elek1} \vec{D} \cdot d\vec{F} + \varphi_2 \oiint_{\partial Elek2} \vec{D} \cdot d\vec{F} \right)$

$$C = \frac{1}{U} \cdot \oiint_{\partial Elek1} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \frac{Q}{U}$$

Merke: Anstatt über das ganze Gebiet zu integrieren, genügt es oft nur das Quellgebiet zu betrachten und über dieses zu integrieren.

Kenngrösse L

- unendlich grosses Integrationsgebiet: $L = \frac{1}{I^2} \iiint_{V\infty} \vec{B} \cdot \vec{H} dV$
- beschränktes Integrationsgebiet: $L = \frac{1}{I^2} \iiint_{G_Q} \vec{J} \cdot \vec{A} dV$

Merke: Anstatt über das ganze Gebiet zu integrieren, genügt es oft nur das Quellgebiet zu betrachten und über dieses zu integrieren.

- In dünnen Drähten gilt: $L = \frac{1}{I} \oint_D \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{I} \iint_{F_D} \vec{B} \cdot d\vec{F} = \frac{\Phi}{I}$

  D: Drahtschleife F_D: Flächeninhalt der Schleife

Kenngrösse R

- $R = \frac{1}{I^2} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$

Anhang

Vektoranalysis

Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Rotation[2]

$$rot(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Gradient

$$grad(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergenz

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Laplace-Operator

$\Delta s = div(grad(s)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(s)$ *operiert auf Skalarfeldern*

$\Delta \vec{v} = grad(div(\vec{v})) - rot(rot(\vec{v}))$ *operiert auf Vektorfeldern*

Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Divergenzen

A und B sind Vektorfelder, ϕ ist ein Skalarfeld, a ist ein konstanter Vektor und c eine Konstante:

- $div(\vec{a}) = 0$
- $div(\phi\vec{A}) = grad(\phi) \cdot \vec{A} + \phi \cdot div(\vec{A})$
- $div(c\vec{A}) = c \cdot div(\vec{A})$
- $div(\vec{A} + \vec{B}) = div(\vec{A}) + div(\vec{B})$
- $div(\vec{A} + \vec{a}) = div(\vec{A})$

Rechenregeln für Rotationen

A und B sind Vektorfelder, ϕ ist ein Skalarfeld, a ist ein konstanter Vektor und c eine Konstante:

---

[2] Oft wird rot(.) auch mit curl(.) abgekürzt.

- $rot(\vec{a}) = 0$
- $rot(\phi\vec{A}) = grad(\phi) \times \vec{A} + \phi \cdot rot(\vec{A})$
- $rot(c\vec{A}) = c \cdot rot(\vec{A})$
- $rot(\vec{A} + \vec{B}) = rot(\vec{A}) + rot(\vec{B})$
- $rot(\vec{A} + \vec{a}) = rot(\vec{A})$

Rechenregeln für Gradienten

ϕ und ψ sind Skalarfelder, c ist eine Konstante:

- $grad(c) = 0$
- $grad(\phi\psi) = \phi \cdot grad(\psi) + grad(\phi) \cdot \psi$
- $grad(c\phi) = c \cdot grad(\phi)$
- $grad(\phi + \psi) = grad(\phi) + grad(\psi)$
- $grad(\phi + c) = grad(\phi)$

Satz von Gauss

$\oiint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{F} = \iiint_V div(\vec{v}) dV$ bzw. $\oint_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_F div(\vec{v}) dF$

Satz von Stokes

$\oint_{\partial F} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_F rot(\vec{v}) \cdot d\vec{F}$

Spezielle Vektorfelder

- **Quellenfreies Vektorfeld:** $div(\vec{F}) = 0$

  $div(\vec{F}) = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = rot(\vec{E})$ E ist das Vektorpotentialfeld.
- **Wirbelfreies Vektorfeld:** $rot(\vec{F}) = \vec{0}$

  $rot(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} = grad(\phi)$ ϕ ist das Potential.
- **Quellen- und wirbelfreies Feld:** $div(\vec{F}) = 0$, $rot(\vec{F}) = \vec{0}$

  $\Delta\phi = 0$

Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten

In Polarkoordinaten:

- $grad(\phi(r,\varphi)) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$
- $div(\vec{F}(r,\varphi)) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$
- $rot(\vec{F}(r,\varphi)) = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot F_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right) \cdot \vec{e}_z$ Nur z-Koordinate!
- $\Delta\phi(r,\varphi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$

In Zylinderkoordinaten:

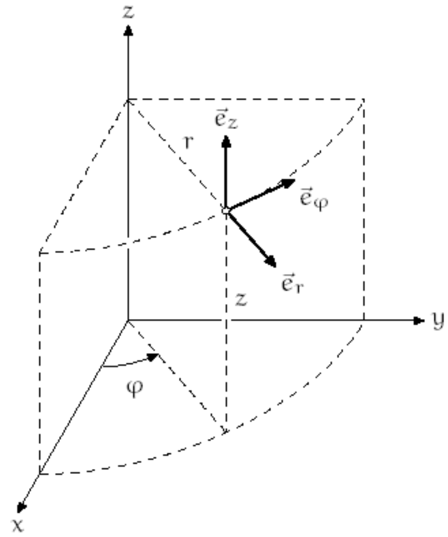
- $$grad(\phi(\rho,\varphi,z)) = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$$
- $$div(\vec{F}(\rho,\varphi,z)) = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial(\rho\cdot F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$
- $$rot(\vec{F}(\rho,\varphi,z)) = \left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\cdot\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\cdot\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho\cdot F_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}\right)\cdot\vec{e}_z$$
- $$\Delta\phi(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

In Kugelkoordinaten:

- $$grad(\phi(r,\vartheta,\varphi)) = \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\cdot\sin(\vartheta)}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$$
- $$div(\vec{F}(r,\vartheta,\varphi)) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial(r^2\cdot F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\cdot\sin(\vartheta)}\cdot\left(\frac{\partial(\sin(\vartheta)\cdot F_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$
- $$rot(\vec{F}(r,\vartheta,\varphi)) = \left[\frac{1}{r\cdot\sin(\vartheta)}\cdot\left(\frac{\partial(\sin(\vartheta)\cdot F_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\right]\cdot\vec{e}_r + \ldots$$
  $$\ldots + \left[\frac{1}{r\cdot\sin(\vartheta)}\cdot\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\cdot F_\varphi)}{\partial r}\right]\cdot\vec{e}_\vartheta + \left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(r\cdot F_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F_r}{\partial\vartheta}\right]\cdot\vec{e}_\varphi$$
- $$\Delta\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin(\vartheta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin(\vartheta)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right]$$

Koordinatensysteme

Zylinderkoordinaten

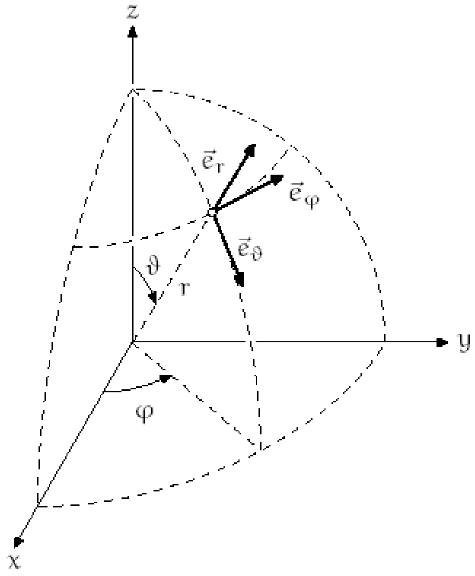


$$\vec{e}_r = \cos(\varphi)\cdot\vec{e}_x + \sin(\varphi)\cdot\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\cdot\vec{e}_x + \cos(\varphi)\cdot\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

Kurvenelement
$$d\vec{s} = dr\vec{e}_r + (rd\varphi)\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$$

Flächenelement
$$d\vec{F} = rd\varphi dz\vec{e}_r$$
$$d\vec{F} = drdz\vec{e}_\varphi$$
$$d\vec{F} = rdrd\varphi\vec{e}_z$$
Volumenelement
$$dV = rdrd\varphi dz$$

Kugelkoordinaten



$$\vec{e}_r = \sin(\vartheta)\cdot\left(\cos(\varphi)\cdot\vec{e}_x + \sin(\varphi)\cdot\vec{e}_y\right) + \cos(\vartheta)\cdot\vec{e}_z$$
$$\vec{e}_\vartheta = \cos(\vartheta)\cdot\left(\cos(\varphi)\cdot\vec{e}_x + \sin(\varphi)\cdot\vec{e}_y\right) - \sin(\vartheta)\cdot\vec{e}_z$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\cdot\vec{e}_x + \cos(\varphi)\cdot\vec{e}_y$$

Kurvenelement
$$d\vec{s} = dr\vec{e}_r + (rd\vartheta)\vec{e}_\vartheta + (r\sin(\vartheta)d\varphi)\vec{e}_\varphi$$

Flächenelement
$$d\vec{F} = r^2\sin(\vartheta)d\vartheta d\varphi\vec{e}_r$$
$$d\vec{F} = r\sin(\vartheta)drd\varphi\vec{e}_\vartheta$$
$$d\vec{F} = rdrd\vartheta\vec{e}_\varphi$$

Volumenelement
$$dV = r^2\sin(\vartheta)drd\vartheta d\varphi$$

Einheiten

Elektrostatik:	**Magnetostatik:**
$J = \left[\frac{A}{m^2}\right]$	$B = \left[\frac{Vs}{m^2}\right] = [T]$
$U = [V],\ R = \left[\frac{V}{A}\right] = [\Omega]$	$\Theta = [A],\ R_m = \left[\frac{A}{Vs}\right]$
$P = \left[\frac{As}{m^2}\right]$	$M = \left[\frac{A}{m}\right]$
$D = \left[\frac{As}{m^2}\right]$	
$E = \left[\frac{V}{m}\right]$	$H = \left[\frac{A}{m}\right]$
$q = [As],\ I = [A]$	$p = [Vs],\ \Phi = [Vs]$
$\sigma = \left[\frac{A}{Vm}\right]$	

Elektrodynamik:

$C = \left[\frac{C}{V}\right] = [F]$ $\quad L = \left[\frac{Vs}{A}\right] = [H]$ $\quad w = \left[\frac{J}{m^3}\right]$ $\quad S = \left[\frac{J}{m^2 s}\right]$

Konstanten und Relationen

Dielektrizitätskonstante: $\varepsilon_0 \approx 8.854\cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}$

Permeabilitätskonstante: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am} \approx 12.566\cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am}$

$1T \triangleq 10^4 Gauss \qquad 1\frac{A}{m} \triangleq 4\pi \cdot 10^{-3} Orsted \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

Quellenverzeichnis

Die Abbildungen und Inhalte sind den folgenden Quellen entnommen:

- Vorlesungsskript ‚Felder und Komponenten I' von Dr. P. Leuchtmann und Prof. Dr. R. Vahldieck
- Formelsammlung von Prof. Dr. F. Detlefsen (TU München)